512.53
K83t

UNIVERSITÉ DE GENÈVE. FACULTÉ DES SCIENCES.
Professeurs: M. M. CHARLES CAILLER et HENRI FEHR.

THÉORIE DES QUATERNIONS.

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE
POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

JACOB KOPELIOWITCH.

UNIVERSITY OF
ILLINOIS LIBRARY
AT URBANA-CHAMPAIGN
MATHEMATICS

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

To renew call Telephone Center, 333-8400

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

MAY 1 0 1981

JAN 2 3 REC'D

L161—O-1096

Hommage respectueux de l'auteur

UNIVERSITÉ DE GENÈVE. FACULTÉ DES SCIENCES.
Professeurs: M. M. CHARLES CAILLER et HENRI FEHR.

THÉORIE DES QUATERNIONS.

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE
POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

JACOB KOPELIOWITCH.

THE LIBRARY OF THE
AUG 11 1933
UNIVERSITY OF ILLINOIS

THÈSE N° 707

LIBRARY U. OF I., URBANA-CHAMPAIGN

La Faculté des Sciences, sur le préavis de Monsieur le Professeur H. Fehr, autorise l'impression de la thèse présentée par M. Kopeliowitch, intitulée: « Théorie des Quaternions », *sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.*

Genève, le 14 juillet 1922.

Le Doyen:

H. FEHR.

512.53
~~512.893~~
K83t

AVANT-PROPOS.

Cette étude a pour but de développer d'une manière homogène la théorie des quaternions. La première partie ne contient que les considérations analytiques, tandis que la seconde est basée sur des démonstrations et interprétations géométriques.

Toutes les propriétés fondamentales du calcul quaternionnien, ainsi que les notions qui s'y rattachent, se déduisent par une suite ininterrompue de propositions de la définition du quaternion et des formules de définition. Par exemple, la définition de l'addition d'un nombre quelconque de quaternions et les propriétés associative, commutative et distributive de cette opération sont de simples conséquences des formules de définition.

Il en est presque de même pour la notion du produit de deux ou de plusieurs quaternions, dont tous les traits caractéristiques se dégagent aisément.

Les deux notions, tout d'abord distinctes, du quaternion-opérateur et du vecteur auquel cet opérateur s'applique, se fondent ensuite en une seule: celle du quaternion. Désormais, il suffit de particulariser les propositions relatives aux quaternions pour obtenir les théorèmes du calcul vectoriel. Grâce aux formules de multiplication des quaternions, la généralisation de la notion de vecteur en celle de quaternion est immédiate.

Pour la clarté de l'éxposé, nous avons, dans le second chapitre, repris la théorie à son point de départ par la méthode géométrique, afin de donner une interprétation concrète de tous les développements analytiques. Les opérations fondamentales du calcul quaternionnien sont établies dans toute leur généralité par des moyens élémentaires. C'est, par exemple, le cas des théorèmes de l'addition et du produit de plusieurs quaternions. La démonstration des propriétés commutative et distributive de l'addition de plusieurs quaternions, négligée en général, est pourtant de grande importance pour

842591

le développement synthétique de la théorie. La preuve de la règle associative de la multiplication de trois quaternions, établie par Hamilton à l'aide des propriétés des coniques sphériques, est faite dans cette étude par une méthode simple et rigoureuse.

La base de la théorie des quaternions est ainsi posée, grâce à ces théorèmes, uniquement à l'aide des opérations élémentaires de la géométrie des vecteurs et de l'analyse vectorielle.

Dans le troisième chapitre, on retrouve la théorie classique des quaternions et les formules de O. Rodrigues. Une seconde définition du produit des quaternions découle des propriétés de l'opérateur $p \ldots p^{-1}$, ainsi qu'une preuve facile de la règle associative de la multiplication.

Il est intéressant de remarquer à la fin de cette introduction que le passage à l'imaginaire, tout en restant dans l'espace euclidien ordinaire, permet une généralisation de la théorie, sans modification aucune dans les formules analytiques; toutefois, cette généralisation présente quelques difficultés dans l'interprétation géométrique. Nous nous proposons de traiter ce sujet dans une publication ultérieure.

Dans l'élaboration de cet essai, les traités classiques de W. R. Hamilton „Elements of Quaternions“ et de P. G. Tait „Traité élémentaire des quaternions“ nous ont servi de point de départ. Nous avons également pu consulter le manuscrit du „Cours de Mécanique“ de Monsieur le Professeur Charles Cailler, qui était alors en préparation, et nous nous sommes efforcés de nous conformer autant que possible aux notations employées dans cet ouvrage. Le lecteur n'aura, par suite, aucune peine de parcourir cette étude en même temps que les chapitres correspondants du Cours de Mécanique.

Il est de notre pieux devoir d'exprimer à cette place notre profonde gratitude à feu Monsieur le Professeur Charles Cailler, dont les conseils bienveillants nous ont guidés dans toute cette étude.

Nous tenons aussi à remercier vivement Monsieur le Professeur Henri Fehr qui nous a aidés par ses indications à mettre ce travail au point.

THÉORIE DES QUATERNIONS.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS ET DÉVELOPPEMENTS ANALYTIQUES.

1. FORMULES DE DÉFINITION.

1. **Notations.** Comme système de repère nous employons un système d'axes trirectangulaires $OX_1X_2X_3$ sinistrorsum, et les vecteurs quelconques, appliqués à l'origine pour plus de clarté, que nous y rapporterons, seront représentés par leurs composantes respectives x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, etc. Ainsi, un vecteur $\overrightarrow{Oa}$ de composantes x_1, x_2, x_3 sera marqué (x_1, x_2, x_3), ou encore x_h $(h=1,2,3)$, et un vecteur $\overrightarrow{Ob}$ de composantes y_1, y_2, y_3 sera désigné par y_h, l'indice h variant toujours de 1 à 3. Nous désignerons parfois pour simplifier un vecteur $\overrightarrow{Oa}$ par vecteur x, un vecteur $\overrightarrow{Ob}$ par vecteur y etc., en supprimant les indices h.

Les notations de l'analyse vectorielle dont nous nous servirons sont : $[x,y]$ pour désigner le produit extérieur, ou vectoriel, (x,y) marquera le produit intérieur, ou scalaire, de deux vecteurs, de même que le symbole (x,x) désignera le carré de la longueur du vecteur x. Le vecteur représentatif des parenthèses $[x,y]$ est fixé en direction et en sens par la règle de Maxwell (règle de tire-bouchon), tandis que sa longueur est égale à la valeur du produit $|x|.|y|.\sin(\widehat{xy})$, $|x|$ et $|y|$ désignant les longueurs des vecteurs correspondants, et $\sin(\widehat{xy})$ le sinus de l'angle formé par les vecteurs en question.

2. **Définition.** *Un quaternion q est un opérateur qui transforme un vecteur $\overrightarrow{Oa}$ en un autre vecteur $\overrightarrow{Ob}$, c. à d. qui transforme les composantes x_h en y_h.*

Cette transformation comporte deux phases. Tout d'abord une rotation d'angle $(\widehat{xy})$ autour de l'origine O, s'effectuant dans le plan défini par les deux vecteurs, de sorte que la direction du vecteur x après la rotation devient celle du vecteur y. L'angle de cette rotation sera nommé *l'amplitude du quaternion q ;* tout vecteur contenu dans le plan aOb et auquel cette rotation peut être appliquée sera dit *appartenant au quaternion q.*

La deuxième phase comporte une extension ou dilatation du vecteur x jusqu'à ce qu'il ait la longueur du vecteur y. Il est évident que l'ordre de ces deux opérations n'influence pas le résultat final.

3. **Théorème.** *Les 4 nombres q_k $(k = 0, 1, 2, 3)$, définis par les relations*

$$\begin{aligned} (x,x)\, q_0 &= (x,y) \\ (x,x)\, q_h &= [x,y]_h \qquad (h = 1, 2, 3^{*}) \end{aligned} \tag{1}$$

déterminent complétement le quaternion q qui transforme le vecteur x en y.

En effet, *le plan du quaternion q*, défini par les vecteurs x et y, est donné par les quantités q_h qui sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à ce plan. Si nous désignons par λ le coefficient de proportionnalité et par α_h les angles directeurs de cette normale, nous aurons :

$$\sum_{(h)} \lambda^2 q_h^2 = \sum_{(h)} \cos^2 \alpha_h = 1 \ ,$$

et en y remplaçant les quantités q_h par leurs expressions tirées de (1), il viendra:

$$\lambda = \frac{(x,x)}{+\sqrt{(x,x)(y,y) - (x,y)^2}} \ , \tag{2}$$

et par suite

$$\cos \alpha_h = \lambda\, q_h \quad . \tag{3}$$

---

*) Dans la suite il sera entendu une fois pour toutes que l'indice h parcourt la série 1, 2, 3, tandis que l'indice k la suite 0, 1, 2, 3.

Pour déterminer les deux autres éléments du quaternion q, l'amplitude de la rotation et la grandeur de l'extension, nous partons de la relation existant entre la surface du parallélogramme construit sur les vecteurs x et y et les projections de cette surface sur les plans coordonnés:

$$\sum_{(h)} [x,y]_h \cos \alpha_h = \lambda \sum_{(h)} [x,y]_h q_h = |x|\,|y| \sin(\widehat{xy}) \quad .$$

Nous en tirons les sinus de l'amplitude de l'opérateur q:

$$\sin(\widehat{xy}) = \frac{|x|}{|y|} \frac{\sum\limits_{(h)} [x,y]_h q_h}{\sqrt{(x,x)(y,y) - (x,y)^2}} \quad , \tag{4}$$

qui est donc donné par les trois quantités q_h. Pour définir complétement l'angle $(\widehat{xy})$, il nous faut encore avoir son cosinus. Or, la première des relations (1) s'écrit:

$$(x,x)\, q_0 = (x,y) = |x|\,|y| \cos(\widehat{xy})$$

et par suite:

$$\cos(\widehat{xy}) = \frac{|x|}{|y|} q_0 \quad . \tag{5}$$

En remarquant qu'on a aussi

$$\sin(\widehat{xy}) = \sqrt{\frac{(x,x)(y,y) - (x,y)^2}{(x,x)(y,y)}} \quad ,$$

la relation (4) pourra s'écrire:

$$\sin^2(\widehat{xy}) = \frac{(x,x)}{(y,y)} \sum_{(h)} q_h^2 \tag{6}$$

et en l'additionant à l'équation (5) élevée au carré, nous obtenons:

$$\sum_{(k)} q_k^2 = \frac{(y,y)}{(x,x)} \quad . \tag{7}$$

Cette relation détermine le dernier élément du quaternion q: la grandeur de l'extension qu'il produit.

Par définition, nous appellerons *grandeur du quaternion* q le radical $+\sqrt{((q,q))}$, avec $((q,q)) = \sum\limits_{(k)} q_k^2$ et nous écrirons

$$|q| = +\sqrt{((q,q))} \quad .$$

Remarque 1. Le coefficient λ étant un facteur de proportionnalité, on peut prendre le radical qui le donne avec le signe $+$. Le signe choisi détermine le sens que nous prendrons pour positif sur la normale au plan du quaternion q. Ce sens est tel que pour un observateur placé dans la direction de la normale, les pieds à l'origine, la rotation produite par le quaternion est sinistrorsum.

Remarque 2. Les trois dernières formules (1), résolues par rapport aux quantités q_h et multipliées respectivement par x_h et y_h, donnent par addition:

$$\sum_{(h)} q_h x_h = \sum_{(h)} q_h y_h = 0 \ .$$

Ce sont les conditions exprimant que les vecteurs x et y appartiennent au quaternion q. Une d'elles peut remplacer une des équations (1) définissant les quantités q_h.

4. *Réciproquement, si l'on a 4 nombres quelconques q_k, définissant un quaternion q, on peut retrouver d'une infinité de manières les vecteurs x et y redonnant les formules* (1).

Prenons, en effet, dans le plan du quaternion q un vecteur quelconque x. On aura:

$$\sum_{(h)} q_h x_h = 0 \ ,$$

on pourra donc prendre deux composantes de x à volonté, la troisième sera définie par cette relation.

Ceci posé, les équations (1) se réduiront par la condition précédente à trois équations linéaires en y_1, y_2, y_3 et définiront d'une façon univoque les composantes du vecteur y. Ces trois composantes, qu'on obtiendra de cette façon, vérifieront d'ailleurs identiquement la première des équations (1) et s'exprimeront par les formules:

$$y_h = q_0 x_h + [q,x]_h \ . \tag{8}$$

5. **Quaternion numérique.** Un quaternion q qui transforme un vecteur x en un vecteur mx (m étant un nombre) de même direction, mais allongé ou raccourci suivant que m est plus grand ou plus petit que 1, aura les 4 quantités q_k égales à:

$$q_0 = m \ , \ q_1 = q_2 = q_3 = 0 \ ,$$

comme on le déduit des formules de définition (1). Nous appellerons un tel quaternion *quaternion numérique* à cause de l'identité de son effet avec celui de la multiplication d'un vecteur par un nombre. Il ne possède ni plan, ni amplitude et peut être appliqué à tout vecteur.

6. **Définition.** *On nomme axe du quaternion q la normale à son plan, plus exactement la demi-normale élevée d'un côté du plan de q et de telle façon que la rotation produite par le quaternion soit sinistrorsum autour de son axe.*

Si l'on porte sur l'axe du quaternion q sa grandeur $|q|$, on obtient l'indice du quaternion.

Il est clair qu'il y a une foule de quaternions distincts ayant le même axe et le même indice. Il suffit que ces quaternions aient un plan commun, qu'ils produisent la même extension et qu'ils aient le même sens de rotation, sans que leurs amplitudes soient égales, et ils auront, tout en étant différents, le même axe et le même indice.

7. **Invariance des formules de définition par rapport à un changement d'axes.** Voyons maintenant comment se transforment les formules de définition (1) quand on change le système de repère. Rappelons tout d'abord brièvement les propriétés fondamentales d'une transformation d'axes orthogonaux.

Désignons par x'_h les composantes du vecteur considéré suivant les axes transformés. Les équations de passage seront:

$$x_h = a_{1h}x'_1 + a_{2h}x'_2 + a_{3h}x'_3 \ ,$$

où les 9 coefficients $a_{\xi\eta}$ vérifient les 6 relations d'un système orthogonal. Les formules inverses s'écriront de même:

$$x'_h = a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + a_{h3}x_3 \ .$$

Soit A le déterminant des coefficients

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \ , a_{12} \ , a_{13} \\ a_{21} \ , a_{22} \ , a_{23} \\ a_{31} \ , a_{32} \ , a_{33} \end{vmatrix}$$

et soit $A_{\xi\eta}$ le déterminant mineur relatif à l'élément $a_{\xi\eta}$. Si les nouveaux axes peuvent être amenés par un déplacement continu à coïncider avec les anciens, on sait que les conditions suivantes sont vérifiées:

$$A = +1 \ , \ a_{\xi\eta} = A_{\xi\eta} \qquad (\xi,\eta = 1, 2, 3) \ .$$

Entre les déterminants mineurs $A_{\xi\eta}$ existent donc les mêmes relations qu'entre les coefficients $a_{\xi\eta}$.

Ces propriétés étant rappelées, transformons les équations (1) par les formules de passage. Il viendra:

$$\left.\begin{aligned} (x',x')\,q'_0 &= (x',y') \ , \\ (x',x')\,q'_h &= [x',y']_h \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

si l'on y pose

$$\begin{aligned} q'_0 &= q_0 \\ q'_h &= \frac{q_h}{A_{hh}} - \frac{A_{\xi h}[x',y']_\xi + A_{\eta h}[x',y']_\eta}{(x',x')\,A_{hh}} \ , \end{aligned}$$

les indices ξ et η dérivant de h par la permutation circulaire des nombres 1, 2, 3; ainsi, si $h=2$, on aura $\xi=3$ et $\eta=1$ etc. La dernière de ces expressions se met après quelques modifications sous la forme

$$q'_h = a_{h1}q_1 + a_{h2}q_2 + a_{h3}q_3$$

et les formules de transformation pour *les composantes* q_k du quaternion q seront donc

$$\left.\begin{aligned} q'_0 &= q_0 \ , \\ q'_h &= a_{h1}q_1 + a_{h2}q_2 + a_{h3}q_3 \end{aligned}\right\} \qquad (9')$$

et leurs inverses:

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= q'_0 \ , \\ q_h &= a_{1h}q'_1 + a_{2h}q'_2 + a_{3h}q'_3 \end{aligned}\right\} . \qquad (9)$$

Les formules de définition (1) *conservent donc leur forme et sont, par conséquent, indépendantes du système d'axes choisi, à condition que les quantités* q_k *soient transformées d'après les équations de passage précédentes.*

2. ADDITION DES QUATERNIONS.

8. **Définition de l'addition des quaternions.** Soient q_k^l $(l=1,2,\ldots,m\,.)$ m quaternions quelconques donnés. Posons:

$$Q_k = \sum_{l=1}^{l=m} q_k^l \quad . \tag{10}$$

Nous dirons que le quaternion déterminé par les 4 sommes Q_k est le quaternion-somme Q des m quaternions donnés q_k^l .

Les quantités q_k^l étant des nombres, les sommes Q_k ne dépendent ni de l'ordre des addendes, ni de leurs combinaisons. Les propriétés associative et commutative de l'addition résultent ainsi immédiatement de la définition (10).

La relation (10) *entre les addendes et la somme est, en outre, indépendante du système d'axes.*

Ceci est évident pour les quantités Q_0. Quant aux composantes Q_h, elles se transforment d'après les même formules que les composantes d'un vecteur et nous avons:

$$Q'_h = a_{h1} Q_1 + a_{h2} Q_2 + a_{h3} Q_3 \quad .$$

En substituant les valeurs de Q_h données par l'équation (10) et en tenant compte des formules de transformation (9′), il vient

$$Q'_h = \sum_{l=1}^{l=m} (a_{h1} q_1^l + a_{h2} q_2^l + a_{h3} q_3^l) = \sum_{l=1}^{l=m} q_h'^l$$

ce qui démontre la proposition.

9. **Lemme.** *Deux quaternions quelconques q et p ont toujours un vecteur commun.*

En effet, les plans des quaternions q et p passant par l'origine des axes, seront ou bien confondus, ou bien auront une droite d'intersection. Dans le premier cas, les deux quaternions auront une infinité de vecteurs communs, dans le second, tout vecteur ayant pour support la ligne d'intersection des deux plans appartiendra aux quaternions q et p à la fois.

Analytiquement, soient q_k et p_k les composantes des quaternions q et p. Si l'on prend un vecteur x satisfaisant aux conditions

$$\sum_{(h)} q_h x_h = \sum_{(h)} p_h x_h = 0 \ ,$$

ou bien, s'exprimant par la relation

$$x_h = \mu [p,q]_h \ ,$$

où μ est un facteur de proportionnalité, ce vecteur appartiendra aux quaternions q et p. Seule la direction de ce vecteur est parfaitement définie par les équations précédentes (toutefois en supposant $q_h \neq p_h$), tandis que sa longeur peut être prise à volonté. On pourra, par conséquent, supposer, sans restreindre la généralité, le facteur μ égal à l'unité.

10. **Corollaire.** Désignons par y et z les vecteurs que l'on obtient à partir du vecteur x traité par les quaternions p et q. Nous pouvons écrire, d'après les formules (8):

$$y_h = p_0 x_h + [p,x]_h \ , \quad z_h = q_0 x_h + [q,x]_h \ ,$$

ou encore, symboliquement:

$$y = px \quad , \quad z = qx.$$

Sommons les composantes de y et de z ayant les même indices; on aura:

$$y_h + z_h = p_0 x_h + [p,x]_h + q_0 x_h + [q,x]_h$$

et en groupant les termes du second membre:

$$y_h + z_h = (p_0 + q_0)\, x_h + [p+q,x]_h = (p_0 + q_0)\, [p,q]_h + [p+q\,,\,[p,q]]_h \cdot$$

Mais, par définition, $(p_k + q_k)$ sont les quatre composantes du quaternions-somme $(p + q)$ et le second membre peut s'écrire symboliquement $(p + q)\, x$. Nous en déduisons donc les identités:

$$px + qx = (p + q)x$$
$$(p + q)x = px + qx = y + z = z + y = qx + px = (q + p)x \ ,$$

car la propriété commutative est vérifiée dans l'addition des vecteurs y et z.

11. **Corollaire:** *Définition du quaternion mq* (où m est un nombre).

a) *m est un nombre entier.*

En partant de la définition (10) du quaternion-somme, dans laquelle nous faisons tous les addendes identiques

$$q_k^1 = q_k^2 = q_k^3 = \cdots = q_k^m \ ,$$

nous avons les 4 sommes suivantes qui définissent le quaternion mq:

$$\sum_{l=1}^{l=m} q_k^l = q_k^1 + q_k^2 + \cdots = q_k^1 + q_k^1 + \cdots \ ,$$

ou, en enlevant les indices supérieurs:

$$(mq)_k = \sum q_k = mq_k = q_k \cdot m \ .$$

Le produit d'un nombre par un quaternion possède donc la propriété commutative.

Géométriquement, l'addition d'un quaternion à lui-même s'interprète de la façon suivante: on traitera par le quaternion considéré le vecteur x, m fois de suite; chaque fois le vecteur x sera transformé en un vecteur y et la somme de tous ces résultats partiels équivaudra, comme on vient de le voir, à l'application du quaternion-somme mq au vecteur x Or cette somme est représentée par un vecteur my de même direction que y, mais m fois plus grand, et on peut dire que l'effet du quaternion mq ne diffère de l'effet de q que par une simple multiplication du résultat par le nombre m

b) *Cas général.*

En général, un quaternion mq étant défini par les 4 quantités $mq_k = q_k m$, m étant une quantité algébrique rationnelle ou irrationnelle, l'effet de l'application de mq peut être obtenu en traitant tout d'abord le vecteur considéré par le quaternion q et en multipliant ensuite le vecteur qui en résulte, d'après les règles habituelles de la géométrie, par la quantité m. Ces deux opérations peuvent d'ailleurs être interverties.

En effet, si x est le vecteur initial et y le vecteur qui en résulte après l'application du quaternion q, on a les formules:

$$(x,x)\,q_0 = (x,y) \quad ,$$
$$(x,x)\,q_h = [x,y]_h$$

et en multipliant par m les deux membres:

$$(x,x)\,mq_0 = (x,x)\,q_0\,m = m\,(x,y) = (x,my) \quad ,$$
$$(x,x)\,mq_h = (x,x)\,q_h m = m\,[x,y]_h = [x,my]_h \quad .$$

Or, si z est le vecteur qui résulte de x par l'application du quaternion mq, on doit avoir:

$$(x,x)\,mq_0 = (x,z) \quad ,$$
$$(x,x)\,mq_h = [x,z]_h \quad ,$$

et l'identité des membres gauches de ces formules avec ceux des précédentes entraîne les trois relations:

$$z_h = my_h$$

ce qui démontre la proposition. La démonstration serait tout à fait semblable si l'ordre des opérations était inverse.

Remarquons que les quaternions définis par les quantités mq_k et q_k proportionnelles entre elles, ont les mêmes amplitudes; leurs grandeurs sont liées par la relation:

$$|mq| = m\,|q|$$

puisqu' on a:

$$\sqrt{((m\,q,mq))} = m\,\sqrt{((q,q))} \quad .$$

Pour montrer que les quaternions ont des amplitudes égales, écrivons les formules (4) et (5) donnant le sinus et le cosinus de l'amplitude de q:

$$|x|\,|y|\,\sin A = \lambda \sum_{(h)} q_h\,[x,y]_h \quad ,$$
$$|x|\,|y|\,\cos A = (x,x)\,q_0 \quad .$$

On constate qu'elles sont identiques aux équations définissant l'amplitude de mq:

$$|x|\,|my|\,\sin A = \lambda' \sum_{(h)} mq_h\,[x,my]_h \quad ,$$
$$|x|\,|my|\,\cos A = (x,x)\;mq_0 \quad ,$$

où le nouveau facteur de proportionnalité λ' est égal à

$$\lambda' = \frac{(x,x)}{\sqrt{(x,x)\,(my,my) - (x,my)^2}} = \frac{\lambda}{m} \quad .$$

Il est évident que les deux quaternions mq et q ont le même plan quel que soit m.

La multiplication des 4 nombres q_k par m ne change donc que la grandeur du quaternion q, ses autres éléments restent invariables.

3. MULTIPLICATION DES QUATERNIONS.

12. **Définition de la multiplication de deux quaternions.**

Soient p, q et r trois quaternions dont le premier transforme un vecteur x en un vecteur y, appartenant au second quaternion, et le second quaternion transforme ce vecteur y en un troisième vecteur z (le vecteur y existe toujours, d'après le lemme du nº 9, et sa longueur est parfaitement définie dès qu'on a choisi celle du vecteur x).

Le quaternion r sera dit le produit des deux autres s'il transforme le vecteur x directement en z. On écrira:

$$r = qp. \tag{11}$$

D'après les formules de définition (1), nous aurons les relations suivantes donnant les composantes p_k, q_k et r_k:

$$\left.\begin{array}{ll} (x,x)\,p_0 = (x,y) \quad , & (x,x)\,p_h = [x,y]_h \quad , \\ (y,y)\,q_0 = (y,z) \quad , & (y,y)\,q_h = [y,z]_h \quad , \\ (x,x)\,r_0 = (x,z) \quad , & (x,x)\,r_h = [x,z]_h \quad . \end{array}\right\} \tag{12}$$

De la seconde ligne de ces formules il résulte, d'après les relations (8):

$$z_h = q_0 y_h - [y,q]_h$$

et en portant ces valeurs dans les dernières des égalités (12), il vient:

$$\begin{array}{l} (x,x)\,r_0 = (x,q_0 y - [y,q]) = q_0\,(x,y) - (x,[y,q]) \quad , \\ (x,x)\,r_h = [x,q_0 y - [y,q]]_h = q_0[x,y]_h - [x,[y,q]]_h \quad . \end{array} \tag{13}$$

Mais, d'après les formules de l'analyse vectorielle, on a:

$$(x,[y,q]) = (q,[x,y]) \ ,$$
$$[x,[y,q]]_h = y_h(q,x) - q_h(x,y) \ .$$

D'autre part, nous pouvons écrire:

$$y_h(q,x) = y_h q_h x_h + y_h q_\xi x_\xi + y_h q_\eta x_\eta = -[q,[x,y]]_h + x_h \sum_{i=1}^{i=3} q_i y_i$$

où les indices ξ et η s'obtiennent à partir de h par une permutation circulaire des chiffres 1, 2, 3. Or, le vecteur y appartient au quaternion q:

$$\sum_{i=1}^{i=3} q_i y_i = 0 \ ,$$

et par conséquent:

$$y_h(q,x) = -[q,[x,y]]_h \ .$$

Nous avons donc les deux formules suivantes:

$$(x,[y,q]) = (q,[x,y]) \ ,$$
$$[x,[y,q]]_h = -[q,[x,y]]_h - q_h(x,y) \ .$$

En portant ces expressions dans les relations (13), il vient, après la division par (x,x):

$$r_0 = q_0 \frac{(x,y)}{(x,x)} - \frac{(q,[x,y])}{(x,x)} \ ,$$

$$r_h = q_0 \frac{[x,y]_h}{(x,x)} + q_h \frac{(x,y)}{(x,x)} + \frac{[q,[x,y]]_h}{(x,x)} \ ,$$

et en tenant compte des valeurs de p_k données par les équations (12), on obtient:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 \ , \\ r_h &= q_0 p_h + q_h p_0 + [q,p]_h \ . \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Ce sont les formules de multiplication de deux quaternions (du type (11)).

13. Remarquons tout de suite que la propriété commutative ne subsiste pas dans la multiplication des quaternions: si l'on

permute les quantités p_k et q_k dans les formules précédentes, r_0 seul ne change pas, tandis que les quantités r_h auront d'autres valeurs, car le produit extérieur $[q,p]_h$ change de signe.

Par conséquent, si nous désignons par s le quaternion-produit pq, ce quaternion aura son plan différent de celui de $r = qp$.

Montrons que ces deux quaternions ont les mêmes grandeurs et les même amplitudes. Nous avons, d'après les formules (14):

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 \ , \\ s_h &= p_0 q_h + p_h q_0 + [p,q]_h \ . \end{aligned}\right\} \qquad (14')$$

Pour prouver l'égalité des grandeurs de r et de s, il nous faut montrer que l'on a:

$$\sqrt{((r,r))} = \sqrt{((s,s))} \ .$$

Mais puisque $s_0 = r_0$, il suffira d'établir l'identité des sommes suivantes:

$$\sum_{(h)} r_h^2 = \sum_{(h)} s_h^2 \ ,$$

les radicaux étant pris avec le signe $+$. Or, si on remplace dans cette relation les quantités r_h et s_h par leurs expressions tirées de (14) et de (14') et si on réduit dans les deux membres les termes identiques, il ne restera à vérifier que:

$$2 \sum_{(h)} (p_0 q_h + p_h q_0)[p,q]_h = 2 \sum_{(h)} (q_0 p_h + q_h p_0)[q,p]_h \ .$$

Mais les deux membres de cette relation étant nuls, nous avons bien:

$$|pq| = |qp| \ .$$

Plus loin nous donnerons la démonstration générale et classique du théorème de la grandeur du quaternion-produit de plusieurs quaternions.

Les quaternions r et s ayant les mêmes grandeurs, si x est un vecteur commun, traité par r et s, il deviendra respectivement y et z, ces deux vecteurs étant différents, mais de longueurs égales:

$$|y| = |z| \ .$$

Soit A l'amplitude du premier et B celle du second quaternion. Les formules (5) donnent:

$$\cos A = \frac{|x|}{|y|} r_0 = \frac{|x|}{|z|} s_0 = \cos B \ .$$

D'autre part:

$$(x,x)\, r_0 = (x,x)\, s_0 = (x,y) = (x,z)$$

et par suite:

$$\lambda_r = \frac{(x,x)}{\sqrt{(x,x)(y,y) - (x,y)^2}} = \frac{(x,x)}{\sqrt{(x,x)(z,z) - (x,z)^2}} = \lambda_s \ .$$

Nous avons donc aussi:

$$\sin A = \lambda_r \frac{|x|}{|y|} \sum_{(h)} r_h^2 = \lambda_s \frac{|x|}{|z|} \sum_{(h)} s_h^2 = \sin B \ .$$

Les amplitudes des quaternions r et s, ayant leurs cosinus et sinus identiques, sont égales entre elles.

14. **Cas particulier: le carré d'un quaternion.** Le quaternion Q, carré d'un quaternion q, est le produit de ce quaternion par lui même: $Q = qq$.

Les formules (14) donnent immédiatement les 4 quantités Q_k définissant Q. On a:

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= q_0 q_0 - q_1 q_1 - q_2 q_2 - q_3 q_3 \ , \\ Q_h &= 2\, q_0 q_h \ . \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Les composantes Q_h étant proportionnelles aux q_h, le quaternion-carré Q aura le même plan que q et sa grandeur est donnée par la relation:

$$|Q| = |q| \cdot |q| = |q|^2.$$

Quant à son amplitude, elle est égale au double de celle de q.

En effet, soit x le vecteur initial, y le vecteur qui en résulte après l'application de q et z le vecteur résultant de y traité de nouveau par q. D'après la définition du produit, le carré de q sera le quaternion transformant x directement en z.

Soit encore A l'amplitude de q et B celle de son carré Q. A l'aide des formules (4) et (5), et en tenant compte des égalités

$$\frac{(y,y)}{(x,x)} = \frac{(z,z)}{(y,y)} = \frac{|z|}{|x|} = ((q,q)) \ ,$$

on obtient facilement

$$Q_0 = \frac{|z|}{|x|} \cos B = \frac{(y,y)}{(x,x)} (\cos^2 A - \sin^2 A) \ ,$$

$$\frac{(z,z)}{(x,x)} \sin^2 B = 4 \frac{(y,y)^2}{(x,x)^2} \sin^2 A \cos^2 A \ ,$$

d'où

$$\cos B = \cos^2 A - \sin^2 A \ ,$$
$$\sin B = \pm 2 \cos A \sin A \ .$$

Par conséquent

$$\hat{B} = 2\hat{A} \ ,$$

le sens de rotation étant évidemment le même pour Q et q.

15. **Corollaires.** a) *Règle distributive de la multiplication des quaternions.*

La propriété commutative de la multiplication n'étant pas vérifiée, voyons si la règle distributive subsiste.

Nous devons montrer que l'on a identiquement:

$$s = (p + q)r = pr + qr \ ,$$
$$t = r(p + q) = rp + rq \ .$$

Or, ceci résulte presque immédiatement de la définition (10) du quaternion-somme $p + q$ et des formules de multiplication (14). On a, en effet:

$$(p + q)_k = p_k + q_k$$

et les formules (14) donnent:

$$s_0 = (p + q)_0 r_0 - (p + q, r) = p_0 r_0 - (p,r) + q_0 r_0 - (q,r) \ ,$$
$$s_h = (p + q)_0 r_h + (p + q)_h r_0 + [p + q, r]_h$$
$$= p_0 r_h + p_h r_0 + [p,r]_h + q_0 r_h + q_h r_0 + [q,r]_h \ .$$

Et de même

$$t_0 = r_0 (p + q)_0 - (r, p + q) = r_0 p_0 - (r,p) + r_0 p_0 - (r,q) \ ,$$
$$t_0 = r_0 (p + q)_h + r_h (p + q)_0 + [r, p + q]_h$$
$$= r_0 p_h + r_h p_0 + [r,p]_h + r_0 q_h + r_h q_0 + [r,q]_h \ .$$

b) *Règle associative de la multiplication.*

Cherchons tout d'abord la signification du produit pqr de trois quaternions p, q et r, définis respectivement par les quantités p_k, q_k et r_k. Désignons par t le quaternion-produit des deux derniers $t = qr$. Les composantes t_k sont:

$$t_0 = q_0 r_0 - (q,r) \ ,$$
$$t_h = q_0 r_h + q_h r_0 + [q,r]_h \ .$$

Soit y un vecteur appartenant aux quaternions p et t et soit x un vecteur tel que traité par le quaternion t il donne le vecteur y; nous aurons:

$$(x,x)t_0 = (x,y) \ ,$$
$$(x,x)t_h = [x,y]_h \ .$$

Si nous appliquons à y le quaternion p, il devient un vecteur z et l'on a:

$$(y,y)p_0 = (y,z) \ ,$$
$$(y,y)p_h = [y,z]_h \ .$$

Le quaternion transformant x directement en z est le produit $u = pt$, défini par les 4 composantes:

$$u_0 = p_0 t_0 - (p,t) \ ,$$
$$u_h = p_0 t_h + p_h t_0 + [p,t]_h \ .$$

Remplaçons t par qr et nous aurons le produit $u = p \cdot qr$ de trois quaternions quelconques p, q et r, défini par les quantités u_k. Les expressions des u_k en fonction des p_k, q_k et r_k seront obtenues en substituant les valeurs des t_k dans les formules précédentes; on aura, en effectuant quelques développements:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= p_0 q_0 r_0 - \sum_{j=1}^{j=3} (p_j q_j r_0 + p_0 q_j r_j + p_j q_0 r_j) - ([pq],r) \\ u_h &= p_0 q_0 r_h + p_0 q_h r_0 + p_h q_0 r_0 + p_0 [q,r]_h - q_0 [r,p]_h \\ &\quad + r_0 [p,q]_h - p_h (q,r) + q_h (r,p) - r_h (p,q). \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Montrons maintenant que la règle associative de la multiplication est vérifiée et qu'on a identiquement:

$$u = pqr \equiv p \cdot qr \equiv pq \cdot r \ .$$

Posons encore $t = qr$ et $s = pq$, les quaternions t et s étant définis par les formules

$$t_0 = q_0 r_0 - (q,r) \quad , \quad t_h = q_0 r_h + q_h r_0 + [q,r]_h \ ,$$
$$s_0 = p_0 q_0 - (p,q) \quad , \quad s_h = p_0 q_h + p_h q_0 + [p,q]_h \ .$$

Nous devons prouver les idendités:

$$u_0 = s_0 r_0 - (s,r) \equiv p_0 t_0 - (p,t) \ ,$$
$$u_h = s_0 r_h + s_h r_0 + [s,r]_h \equiv p_0 t_h + p_h t_0 + [p,t]_h \ .$$

Remplaçons pour cela s_k et t_k par leurs expressions. La première relation à vérifier devient, après la réduction dans les 2 membres des parties identiques composées des termes symétriques par rapport aux composantes p_k, q_k et r_k:

$$([p,q],r) = (p,[q,r]) \ .$$

Mais ceci est une identité, les deux membres représentent un même déterminant développé suivant deux colonnes différentes. La seconde relation donne:

$$u_h = p_0 q_0 r_h - (p,q) r_h + p_0 q_h r_0 + p_h q_0 r_0 + [p,q]_h r_0 + [p_0 q + p q_0 + [p,q],r]_h$$
$$= p_0 q_0 r_h + p_0 q_h r_0 + p_0 [q,r]_h + p_h q_0 r_0 - p_h (q,r) + [p,q_0 r + q r_0 + [q,r]]_h$$

et, après avoir fait la réduction des termes identiques et le développement du dernier produit extérieur, on obtient:

$$- (p,q) r_h + [p,q]_h r_0 + p_0 [q,r]_h + q_0 [p,r]_h + [[p,q],r]_h$$
$$= p_0 [q,r]_h - p_h (q,r) + q_0 [p,r]_h + r_0 [p,q]_h + [p,[q,r]]_h \ .$$

En réduisant et en appliquant enfin la formule de l'analyse vectorielle:

$$[p,[q,r]]_h = q_h (r,p) - r_h (p,q) \ ,$$

il vient:

$$- (p,q) r_h + q_h (r,p) - p_h (q,r) = - p_h (q,r) + q_h (r,p) - r_h (p,q)$$

ce qui prouve l'identité.

4. GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DU VECTEUR.

16. Considérons un quaternion *q rectangle* ou *quadrant*, c. à d. un quaternion dont l'amplitude est de 90°. Le vecteur initial x et le vecteur final y étant à l'angle droit, on a:

$$(x,y) = 0$$

et les formules (1) donnent:

$$q_0 = 0 \ , \ q_h \neq 0.$$

Cherchons les 4 composantes r_k du quaternion-produit $r = pq$, où p est un quaternion quelconque. Nous avons:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= -(p,q) \ , \\ r_h &= p_0 q_h + [p,q]_h \ . \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Si le plan du quaternion q est perpendiculaire à celui de p, ce qui s'exprime par la condition $(q,p) = 0$, on aura le quaternion-produit r défini par les 4 nombres:

$$r_0 = 0 \ , \ r_h = p_0 q_h + [p,q]_h \ .$$

Il en résulte que r sera dans ce cas aussi rectangle.

En comparant ces résultats aux formules (8), on constate que le quaternion p transforme q *comme si q était un vecteur.* Autrement dit, *on peut assimiler un quaternion-rectangle q à un vecteur dont les composantes seraient les quantités q_h et dont le carré de longueur serait (q,q) et inversement. Ce vecteur ne serait autre chose que l'indice du quaternion rectangle q.*

Si ce vecteur appartient à p, c. à d. si l'on a $(p,q) = 0$, il est indifférent de considérer pq comme produit de deux quaternions, ou comme l'effet sur le quaternion-rectangle, ou vecteur q, de l'opérateur p, qui le transforme en un autre quaternion-rectangle, ou vecteur r de composantes r_h; ces composantes sont celles de l'indice du quaternion r.

En assimilant le vecteur à l'indice d'un quaternion-rectangle, nous étendons le domaine d'action d'un quaternion qui, de cette façon, pourra être appliqué à n'importe quel vecteur: en effet, le

produit de deux quaternions existant toujours, l'effet de l'application qu'un quaternion à un vecteur quelconque s'exprimera par la transformation des composantes de ce dernier d'après les formules (14) en 4 composantes du quaternion-produit qui en résulte.

17. Supposons maintenant que le quaternion p est aussi rectangle ($p_0 = 0$) et a son plan perpendiculaire au plan de q ($(p,q) = 0$). Si l'on considère p comme vecteur et q comme opérateur, p appartiendra à cet opérateur et inversement. Leur produit $r = pq$ sera défini par les formules:

$$r_0 = 0 \ , \ r_h = [p,q]_h \ .$$

On s'assure aisément que les quantités r_h vérifient dans ce cas les deux relations

$$(r,p) = (r,q) = 0$$

et on en conclut que les trois vecteurs p, q et r forment un trièdre trirectangle à gauche, c. à d. tel que si l'on enfonce un tire-bouchon tournant dans le sens de q vers r, il avancera dans la direction du vecteur p.

Si les quaternions-rectangles p et q ne sont pas perpendiculaires entre eux, leurs produit $r = pq$ est donné par les relations:

$$\begin{aligned} r_0 &= -(p,q) \ , \\ r_h &= \quad [p,q]_h \ . \end{aligned}$$

En assimilant p et q à des vecteurs, nous en tirons que *le produit de deux vecteurs est un quaternion.* Les formules précédentes, où l'on considère les quantités p_h et q_h comme les composantes des vecteurs p et q, ne diffèrent que par des facteurs numériques $-(p,p)$ et (p,p) des formules de définition (1). On en conclut que *le plan du quaternion-produit r est le plan des vecteurs p et q, le sens de rotation qu'il produit est celui de p vers q et sa grandeur est donnée par la formule:*

$$((r,r)) = (p,q)^2 + \sum_{(h)} [p,q]_h^2 \ ,$$

d'où

$$|r| = |p| \cdot |q| \quad .$$

Quant à son amplitude, faisons le raisonnement suivant. Appliquons le quaternion r au vecteur p et soit y le vecteur qui en résulte. D'après les formules (1), nous avons:

$$(p,p)r_0 = (p,y) \quad ,$$
$$(p,p)r_h = [p,y]_h \quad ,$$

ou bien, d'après (8):

$$y_h = r_0 p_h + [r,p]_h \quad .$$

Substituons les valeurs de r_k dans ces relations, il viendra:

$$-(p,p)(p,q) = (p,y) \quad ,$$
$$(p,p)[p,q]_h = [p,y]_h \quad ,$$

de même que

$$y_h = q_h\,(p,p) - 2p_h\,(q,p) \quad .$$

Soit A l'angle compris entre p et y, c. à d. l'amplitude de r, et soit B l'angle formé par les vecteurs p et q. On a:

$$(y,p) = |y| \cdot |p| \cos A \quad ,$$

où

$$|y| = \sqrt{(y,y)} = \sqrt{((r,r))(p,p)} = \sqrt{(q,q)(p,p)^2} = (p,p)\sqrt{(q,q)} \quad ,$$
$$|p| = \sqrt{(p,p)} \quad , \quad |q| = \sqrt{(q,q)} \quad .$$

Il s'ensuit:

$$-(p,p)(p,q) = (p,p)\sqrt{(p,p)(q,q)}\cos A \quad ,$$

ou encore:

$$\cos A = \frac{-(p,q)}{\sqrt{(p,p)(q,q)}} = -\cos B \quad .$$

On a de même:

$$|p| \cdot |q| \sin B = \frac{\sum\limits_{(h)} [p,q]_h^2}{\sqrt{(p,p)(q,q) - (p,q)^2}} \quad ,$$

d'où:

$$sinB = +\sqrt{1 - \frac{(p,q)^2}{(p,p)(q,q)}} \quad .$$

D'autre part:

$$sinA = +\sqrt{1 - \frac{(p,y)^2}{(p,p)(y,y)}}$$

et en remplaçant (p,y) et (y,y) par leurs valeurs:

$$sinA = +\sqrt{1 - \frac{(p,p)^2(p,q)^2}{(p,p)(q,q)(p,p)^2}} = sinB \quad .$$

Nous en concluons que l'amplitude A du quaternion r est le supplément de l'angle compris entre les vecteurs p et q.

5. DÉFINITIONS.

18. **Quaternion opposé.** Nous appelerons le quaternion

$$-q = (-q_0 \, , -q_1 \, , -q_2 \, , -q_3)$$

quaternion opposé au quaternion q.

Les cosinus directeurs de l'axe de $-q$ ne diffèrent que par le signe de ceux de l'axe de q. Il s'ensuit que l'axe de q est opposé à celui de $-q$, c. à d. que les sens des rotations produites par ces deux quaternions, et qui s'effectuent dans un même plan, sont opposés.

D'après les formules (4) et (5), l'amplitude du quaternion opposé $-q$ a son *sinus* identique à celui de l'amplitude de q, tandis que leurs *cosinus* sont de signes contraires. Par suite, l'amplitude de $-q$ sera supplémentaire de l'amplitude de q. Le sens des rotations étant opposé, le vecteur z résultant de x par l'application du quaternion opposé $-q$, sera opposé au vecteur y, résultant de x par l'application du quaternion q. Les longueurs des vecteurs y et z sont d'ailleurs égales, puisque les grandeurs de q et $-q$ sont identiques.

On peut aussi obtenir l'effet de $-q$ en traitant tout d'abord le vecteur x par le quaternion q et en multipliant ensuite le vecteur y, obtenu ainsi, par -1, ce qui donne le vecteur z opposé à y.

19. **Quaternion réciproque.** On appellera *quaternion inverse ou réciproque* du quaternion q le quaternion $q^{-1} = \frac{1}{q}$ défini par l'équation:

$$q \cdot q^{-1} = q \cdot \frac{1}{q} = q^{-1} \cdot q = \frac{1}{q} \cdot q = 1 \quad ,$$

ou bien:

$$q = \frac{1}{q^{-1}} \quad .$$

Nous pouvons, en effet, écrire:

$$qq^{-1} = q^{-1}q \quad ,$$

car:

$$qq^{-1} = 1$$

et en traitant par q^{-1}:

$$q^{-1} \cdot qq^{-1} = q^{-1} = q^{-1}q \cdot q^{-1}$$

d'où

$$q^{-1}q = 1 \quad .$$

Pour avoir les composantes q_k^{-1}, on n'a qu'à résoudre le système de 4 équations suivantes:

$$\begin{aligned} q_0 q_h^{-1} - (q,q^{-1}) &= 1 \quad , \\ q_0 q_h^{-1} + q_h q_0^{-1} + [q,q^{-1}]_h &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est:

$$D = \begin{vmatrix} q_0 , & -q_1 , & -q_2 , & -q_3 \\ q_1 , & q_0 , & -q_3 , & -q_2 \\ q_2 , & q_3 , & q_0 , & -q_1 \\ q_3 , & q_2 , & q_1 , & q_0 \end{vmatrix} = ((q,q))^2 \quad ,$$

et la résolution donne:

$$q^{-1} = \left(\frac{q_0}{((q,q))}, \frac{-q_1}{((q,q))}, \frac{-q_2}{((q,q))}, \frac{-q_3}{((q,q))} \right) .$$

En cherchant la grandeur de q^{-1}, on obtient:

$$|q^{-1}| = \frac{1}{|q|} .$$

Les quantités q_h^{-1} étant proportionnelles aux quantités q_h, mais de signe contraire, le quaternion inverse q^{-1} aura le même plan que q, mais son axe est opposé à celui de q. La rotation produite par q^{-1} sera donc de sens contraire à celle produite par le quaternion q.

Montrons que les amplitudes de q^{-1} et de q sont égales. Les formules (4) et (5) donnent:

$$\cos B = \frac{1}{|q^{-1}|} q_0^{-1} = |q| \frac{q_0}{((q,q))} = \frac{1}{|q|} q_0 = \cos A ,$$

$$\sin^2 B = \frac{1}{((q^{-1},q^{-1}))} (q^{-1},q^{-1}) = \frac{((q,q))}{((q,q))^2} (q,q) = \frac{(q,q)}{((q,q))} = \sin^2 A ,$$

d'où, au signe près:

$$A = B.$$

Si donc on traite un vecteur x par q et si l'on applique ensuite au vecteur y ainsi obtenu le quaternion réciproque q^{-1} on retrouvera le vecteur x, puisqu'on a:

$$(y,y)q_0^{-1} = (y,x) ,$$
$$(y,y)q_h^{-1} = [y,x]_h ,$$

et en y remplaçant les quantités q_k^{-1} et (y,y) par leurs valeurs $\{ (y,y) = ((q,q))(x,x) \}$:

$$(x,x)((q,q)) \frac{q_0}{((q,q))} = (x,x)q_0 = (x,y) ,$$

$$(x,x)((q,q)) \frac{-q_h}{((q,q))} = -(x,x)q_h = -[x,y]_h .$$

On peut aussi écrire symboliquement

$$y = qx$$

d'où, en traitant par le réciproque q^{-1}:

$$q^{-1}y = q^{-1}qx = x.$$

20. **Quaternion conjugué.** Le *quaternion conjugué* $\bar{q}$ de q est défini par la relation:

$$q\bar{q} = \bar{q} \cdot q = ((q,q)) \ .$$

Les composantes de $\bar{q}$ seront donc données par les équations:

$$q_0\bar{q}_0 - (q,\bar{q}) = ((q,q)) \ ,$$
$$q_0\bar{q}_h + q_h\bar{q}_0 + [q,\bar{q}]_h = 0 \ ,$$

car le produit $q\bar{q}$ étant un quaternion numérique, on a:

$$(q\bar{q})_0 = ((q,q)) \quad , \quad (q\bar{q})_h = 0 \ .$$

Le déterminant de ce système est encore:

$$D = ((q,q))^2 \ .$$

La résolution de ce système donne:

$$\bar{q} = (q_0 \ , -q_1 \ , -q_2 \ , -q_3) \ .$$

Le quaternion q et son conjugué $\bar{q}$ ont donc un même plan, mais produisent des rotations de sens contraires, leurs axes étant opposés; leurs amplitudes et leurs grandeurs sont d'ailleurs égales.

Si un vecteur x est transformé en un vecteur y par le quaternion q, x sera transformé en z par son conjugué $\bar{q}$, z étant symétrique de y par rapport à x.

Dans le cas où le quaternion q est un *verseur*, c. à d. tel que $((q,q)) = 1$, son conjugué et son inverse seront identiques, puisqu'on aura:

$$q^{-1} = (q_0 \ , -q_1 \ , -q_2 \ , -q_3) = \bar{q} \ .$$

Si l'on se sert de la représentation usuelle des verseurs par les arcs de grand cercle d'une sphère unité, le conjugué et l'inverse d'un verseur seront donc représentés par le même arc qui représente

le verseur même: ces trois verseurs ont un même plan et des amplitudes égales, mais l'arc représentatif du conjugué et de l'inverse sera parcouru dans le sens inverse*.

21. **Théorème.** *Le conjugué du produit de deux quaternions est égal au produit des conjugués des facteurs multipliés dans un ordre inverse:*

$$\overline{pq} = \overline{q} \cdot \overline{p} \ .$$

Soit $r = (r_0 , r_1 , r_2 , r_3)$ le quaternion produit $r = pq$ des quaternions p et q. Les composantes r_k de ce produit sont:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= p_0 q_0 - (p,q) \ , \\ r_h &= p_0 q_h + p_h q_0 + [p,q]_h \ . \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Le quaternion conjugué de r est par définition:

$$\overline{r} = (r_0 , -r_1 , -r_2 , -r_3) \ .$$

Or les formules (14) nous permettent d'écrire:

$$\overline{r}_0 = q_0 p_0 - (-q_1)(-p_1) - (-q_2)(-p_2) - (-q_3)(-p_3) = r_0 \ ,$$
$$\overline{r}_h = q_0 (-p_h) + (-q_h) p_0 + [-q , -p]_h = - r_h$$

ce qui démontre le théorème, puisque les conjugués des quaternions p et q sont:

$$\overline{p} = (p_0 , -p_1 , -p_2 , -p_3) \ , \quad \overline{q} = (q_0 , -q_1 , -q_2 , -q_3) \ .$$

On peut facilement généraliser ce théorème pour un nombre quelconque de facteurs.

En effet, considérons le produit de trois quaternions quelconques p, q et r. Nous avons: $pqr = pq \cdot r = u \cdot r$, avec $u = pq$, et par suite

$$K(pqr) = \overline{ur} = \overline{r} \cdot \overline{u} \ ,$$

et comme $\overline{u} = \overline{q} \cdot \overline{p}$, on obtient:

$$K(pqr) = \overline{r} \cdot \overline{q} \cdot \overline{p} \ .$$

---

* A côté de la notation très courte $\overline{q}$, nous nous réservons de nous servir, où il y a avantage, de celle de Hamilton qui désigne le quaternion conjugué par Kq.

Dans les cas d'un nombre quelconque de quaternions, on n'aura qu'à répéter plusieurs fois ce raisonnement pour obtenir la formule générale

$$K(l \cdot m \cdot n \ldots p \cdot q \cdot r) = \bar{r} \cdot \bar{q} \cdot \bar{p} \cdot \ldots \bar{n} \cdot \bar{m} \cdot \bar{l} \ .$$

Ce théorème nous permet de démontrer la proposition fondamentale suivante: *la grandeur du quaternion-produit de plusieurs quaternions est égale au produit des grandeurs de ces quaternions.*

Dans le cas du produit de deux quaternions, on doit donc avoir:

$$((r,r)) = ((p,p)) \cdot ((q,q)) \ ,$$

si $r = pq$.

D'après la définition du quaternion conjugué, nous pouvons, en effet, écrire:

$$((r,r)) = r\bar{r} = pq \cdot \overline{pq} = p \cdot q \cdot \bar{q} \cdot \bar{p} = p((q,q))\bar{p} \ .$$

Mais le produit $((q,q))$ est une quantité numérique et on peut le permuter dans sa multiplication avec les quaternions; il s'ensuit:

$$((r,r)) = ((q,q)) \cdot p \cdot \bar{p} = p\bar{p}((q,q)) = ((q,q))((p,p)) = ((p,p))((q,q)) \ .$$

La généralisation pour un nombre quelconque de facteurs ne présente aucune difficulté et nous pouvons donc dire que *l'ordre des facteurs dans un produit de quaternions n'influence pas la grandeur du quaternion-produit.*

En remplaçant dans la formule $((r,r)) = ((p,p))((q,q))$ les composantes du quaternion $r = pq$ par leurs expressions tirées des formules (14), on obtient l'identité d'Euler.

$$((p,p))((q,q)) = (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + \sum_{(h)} (p_0q_h + p_hq_0 + [p,q]_h)^2 \ .$$

22. **Corollaires.** a) D'après ce qui précède, on aura pour tout quaternion-rectangle χ de composantes $(0 \ , q_1 \ , q_2 \ , q_3)$

$$\bar{\chi} = -\chi \ .$$

Si les axes de deux quaternions-quadrants $\tilde{\omega}$ et χ sont à l'angle droit, le conjugué de leur produit sera:

$$K(\tilde{\omega}\chi) = \bar{\chi} \cdot \bar{\tilde{\omega}} = (-\chi)(-\tilde{\omega}) = \chi \cdot \tilde{\omega} = -\tilde{\omega} \cdot \chi \ ,$$

les quantités caractéristiques du produit $\varrho = \tilde{\omega}\chi$ étant dans ce cas

$$r_0 = 0 \ , \ r_h = [p,q]_h \ .$$

Pour avoir le conjugué de l'inverse d'un quaternion, on partira de la relation: $qq^{-1} = 1$, qui donne

$$\bar{q}^{-1} \cdot \bar{q} = 1 \ ,$$

ou bien

$$\bar{q}^{-1} = \frac{1}{\bar{q}} \ .$$

Les conjugués des quaternions inverses sont donc aussi inverses entre eux. Nous pouvons écrire:

$$\bar{q}^{-1} = \frac{q}{q\bar{q}} = \frac{q}{((q,q))} \ .$$

b) *Le produit de deux quaternions réciproques est égal au réciproque du produit interverti:*

$$p^{-1}q^{-1} = (qp)^{-1} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{qp} \ .$$

En effet, on a:

$$p^{-1}q^{-1} = \left\{ \frac{p_0 q_0 - (p,q)}{((p,p))((q,q))} \ , \ \frac{-p_0 q_h - p_h q_0 + [p,q]_h}{((p,p))((q,q))} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{q_0 p_0 - (q,p)}{((p,p))((q,q))} \ , \ \frac{-(q_0 p_h + q_h p_0 + [q,p]_h)}{((p,p))((q,q))} \right\} \ ,$$

car

$$|qp| = \sqrt{((q,q))((p,p))} \ .$$

23. **Division des quaternions.** *Le quotient de deux quaternions p et q est un quaternion r tel que multiplié par le diviseur, il redonne le dividende.*

Mais comme il peut y avoir deux multiplications (multiplicateur à gauche, multiplicateur à droite), nous sommes conduits de distinguer deux types de divisions:

1. *type: multiplicateur ou diviseur à droite:*

$$\frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q} = s \quad ;$$

2. *type: multiplicateur ou diviseur à gauche:*

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q} \cdot p = t \quad .$$

On en tirera dans les deux cas:

$$p = sq = qt \quad .$$

Les expressions des composantes s_k et t_k des quaternions-quotients s et t peuvent facilement être obtenues à l'aide de la définition du quaternion inverse. Elle ramène, en effet, la division des quaternions à la multiplication, puisqu'on peut écrire:

$$\text{1. type:} \quad \frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q} = pq^{-1} = s \quad ,$$

$$\text{2. type:} \quad \frac{p}{q} = \frac{1}{q} \cdot p = q^{-1}p = t \quad ,$$

q^{-1} étant l'inverse de q. Les formules (14′) donnent:

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{((q,q))}\,((p,q)) = t_0 \quad , \\ s_h &= \frac{1}{((q,q))}\,(-\,p_0 q_h + p_h q_0 - [p,q]_h) \quad , \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

et

$$t_h = \frac{1}{((q,q))}\,(q_0 p_h - q_h p_0 - [q,p]_h) \quad . \qquad (18')$$

Dans le cas particulier où les deux quaternions q et p sont rectangles ($p_0 = q_0 = 0$) et peuvent être assimilés à des vecteurs, les formules précédentes deviennent:

$$(q,q)s_0 = (q,p) \quad , \quad (q,q)s_h = \quad [q,p]_h \quad ,$$
$$(q,q)t_0 = (q,p) \quad , \quad (q,q)t_h = -\,[q,p]_h \quad .$$

Or, la première ligne de ces relations, ne diffère point des formules de définition (1): *le quotient de deux vecteurs est donc un quaternion ayant pour plan le plan de ces vecteurs, son amplitude est égale à l'angle formé par ces vecteurs, sa grandeur est donnée par le rapport des longueurs de ces vecteurs.*

24. **Théorème.** *Le conjugué d'un rapport est égal au rapport des conjugués, la division changeant de type.*

Nous avons, en effet, $\bar{s} = K\left(p\frac{1}{q}\right) = \bar{q}^{-1} \cdot \bar{p}$ et puisque $\bar{q}^{-1} = \frac{1}{\bar{q}}$, on obtient:

$$\bar{s} = K\left(\frac{p}{q}\right) = K\left(p\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{\bar{q}} \cdot \bar{p} = \frac{\bar{p}}{\bar{q}} \quad .$$

De même:

$$\bar{t} = K\left(\frac{p}{q}\right) = K\left(\frac{1}{q}\,p\right) = K(q^{-1}\,p) = \bar{p} \cdot \bar{q}^{-1} = \bar{p} \cdot \frac{1}{\bar{q}} \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

A l'aide de ce théorème, cherchons les grandeurs des rapports s et t, définis par les formules (18). Nous avons:

$$((s,s)) = s \cdot \bar{s} = p \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\bar{q}} \cdot \bar{p} = p \cdot \frac{1}{q \cdot \bar{q}} \cdot \bar{p} = \frac{1}{((q,q))}\,p\bar{p} = \frac{((p,p))}{((q,q))} \,,$$

de même que:

$$((t,t)) = t \cdot \bar{t} = \frac{1}{q}\,p\bar{p}\,\frac{1}{\bar{q}} = \frac{((p,p))}{((q,q))} = ((s,s)) \quad .$$

Ainsi, *la grandeur du rapport de deux quaternions est égale au rapport des grandeurs de ces quaternions.* On aurait pu arriver

à ce résultat en employant uniquement les théorèmes relatifs à la multiplication qui donnent immédiatement la dernière relation:

$$\left| p \frac{1}{q} \right| = |p| \cdot |q^{-1}| = \frac{|p|}{|q|} \quad .$$

CHAPITRE II.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA THÉORIE.

1. ADDITION DES QUATERNIONS.

25. **Rappel des définitions.** Nous avons établi jusqu'à présent les propriétés fondamentales du calcul des quaternions uniquement par des considérations analytiques. Il serait bon de compléter l'étude qui précède par une interprétation géométrique générale qui permettrait de retrouver les théorèmes déjà vus en partant de la définition du quaternion, sans faire appel à l'analyse.

Rappelons brièvement la définition d'un quaternion: c'est un opérateur q qui transforme un vecteur $\overrightarrow{Oa}$ en un autre $\overrightarrow{Ob}$ que nous supposons partant d'une origine commune.

Pour connaître complètement le quaternion q, il est nécessaire d'avoir 4 éléments définissant le plan du quaternion, son amplitude et sa grandeur (voir nº 3). Nous écrivons:

$$\overrightarrow{Ob} = q \cdot \overrightarrow{Oa} \quad ,$$

ou bien, sous une forme *équivalente par définition:*

$$\frac{\overrightarrow{Ob}}{\overrightarrow{Oa}} = q \quad .$$

Deux cas particuliers sont à signaler immédiatement: celui où les deux vecteurs ont un même support et celui où les longueurs des deux vecteurs sont égales. Dans le premier cas, le quaternion n'effectue que l'extension et s'appelle *quaternion numérique.* Dans

le second, l'opération se réduit à la rotation seule et le quaternion porte le nom de *verseur*.

Si la rotation effectuée est de 90°, nous désignerons l'opérateur par *quaternion-quadrant* (ou *rectangle*) ou *verseur-quadrant*.

A chaque quaternion, à l'exception des quaternions numériques, correspond un *indice* qui est un vecteur porté dans le sens positif sur l'axe du quaternion et dont la longueur est égale à la *grandeur du quaternion* (v. nº 6).

Inversement, *l'indice ne définit que la grandeur, le sens de rotation et le plan du quaternion*, et ce sont seulement les *quaternions-quadrants* qui sont parfaitement définis par leurs indices.

Par définition, *nous assimilons un vecteur à un quaternion-quadrant dont l'indice est confondu avec ce vecteur.*

Cette définition nous permet de réunir en une les deux notions: celle du quaternion et du vecteur. Grâce à cette généralisation, on pourra traiter par un quaternion un vecteur quelconque, n'appartenant pas nécessairement au quaternion. Nous faisons ainsi correspondre à chaque vecteur un plan qui lui est perpendiculaire. Si le vecteur appartient à un quaternion, les plans de ce quaternion et du quaternion-quadrant forment un dièdre droit.

En particulier, un *vecteur-unité* sera assimilé à un *verseur-quadrant* ou *verseur-unitaire*.

26. **Addition de deux quaternions.** Appliquons deux quaternions quelconques p et q à un vecteur $\overrightarrow{Oa}$, ayant pour support la ligne d'intersection des plans de ces quaternions, et soient respectivement $\overrightarrow{Ob}$ et $\overrightarrow{Oc}$ les vecteurs qui en résultent (fig. 1). Nous pouvons écrire:

$$\overrightarrow{Ob} = p \cdot \overrightarrow{Oa} \quad , \quad \overrightarrow{Oc} = q \cdot \overrightarrow{Oa}.$$

Additionnons les vecteurs $\overrightarrow{Ob}$ et $\overrightarrow{Oc}$ d'après les règles usuelles de l'addition des vecteurs et soit $\overrightarrow{Od}$ leur résultante:

$$\overrightarrow{Od} = \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc} = \overrightarrow{Oc} + \overrightarrow{Ob}$$

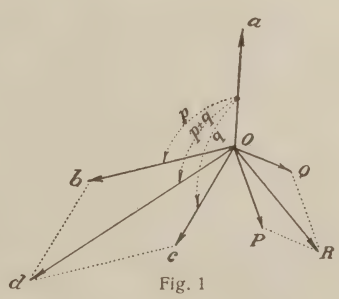

Fig. 1

Le quaternion-somme $p + q$ des quaternions p et q est le quaternion qui transforme $\overrightarrow{Oa}$ directement en $\overrightarrow{Od}$:

$$\overrightarrow{Od} = (p + q)\,\overrightarrow{Oa} \quad .$$

De la construction même de $\overrightarrow{Od}$ il ressort que l'on a identiquement:

$$p \cdot \overrightarrow{Oa} + q \cdot \overrightarrow{Oa} = \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc} = \overrightarrow{Od} = (p + q)\,\overrightarrow{Oa}$$
$$= \overrightarrow{Oc} + \overrightarrow{Ob} = q \cdot \overrightarrow{Oa} + p \cdot \overrightarrow{Oa} = (q + p)\,\overrightarrow{Oa} \quad ,$$

c. à d.: $p + q = q + p$. *L'addition des quaternions est, par conséquent, commutative.*

Les droites $\overrightarrow{Ob}$, $\overrightarrow{Oc}$ et $\overrightarrow{Od}$ sont situées, comme il résulte de leur construction, dans un même plan qui est généralement incliné sur $\overrightarrow{Oa}$.

Dans le cas particulier où les quaternions p et q sont *rectangles,* les vecteurs $\overrightarrow{Ob}$ et $\overrightarrow{Oc}$ sont perpendiculaires à $\overrightarrow{Oa}$, $\overrightarrow{Oa}$ sera donc perpendiculaire à leur résultante $\overrightarrow{Od}$ et le quaternion-somme $p + q = q + p$ est aussi rectangle. Si $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sont les indices de p et de q, ou les vecteurs correspondants à ces quaternions, ils sont dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{Oa}$, c. à d. dans le plan bOc. On a, en outre: $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{Ob}$ et $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{Oc}$ et par suite:

$$b\widehat{O}c = P\widehat{O}Q \quad .$$

Si nous prenons le vecteur $\overrightarrow{Oa}$ égal à l'unité, nous aurons:

$$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{Ob}| \quad , \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{Oc}| \quad ,$$

et les parallélogrammes $Obcd$ et $OPQR$ seront égaux. Leurs côtés étant respectivement perpendiculaires entre eux, leurs diagonales $\overrightarrow{Od}$ et $\overrightarrow{OR}$ le seront aussi; la résultante $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ sera donc perpendiculaire au plan aOd et identique à l'indice du quaternion-quadrant $p + q = q + p$. On en conclut que *pour additionner deux vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$, il est indifférent qu'on effectue la sommation en les assimilant aux quaternions-rectangles p et q, ou qu'on les somme directement comme vecteurs.*

Inversement, *l'addition des quaternions-quadrants peut-être remplacée par celle des indices ou vecteurs représentatifs.*

Le quaternion $u = p + q = q + p$ étant obtenu par la construction précédente, nous pourrons l'additionner à son tour à un troisième quaternion quelconque r, et nous écrirons, par définition:

$$v = p + q + r = (p + q) + r = r + (p + q)$$
$$= r + (q + p) = (q + p) + r = \ldots$$

En additionnant le quaternion $v = p + q + r$, ainsi construit, à un quatrième quaternion quelconque s, nous poserons:

$$w = p + q + r + s = (p + q + r) + s = s + (p + q + r) = \ldots$$

Nous pouvons donc, en procédant par étapes, construire la somme de 4 quaternions p, q, r et s.

27. **Théorèmes.** I. *Tout quaternion q peut se mettre sous la forme d'une somme de deux quaternions q_0 et χ, dont le premier est un quaternion numérique et le second un quaternion-quadrant ou vecteur:*

$$q = q_0 + \chi \ .$$

Soient encore $\overrightarrow{Oa}$ le vecteur initial et $\overrightarrow{Ob}$ le vecteur final

$$\overrightarrow{Ob} = q\ \overrightarrow{Oa} \ .$$

Décomposons $\overrightarrow{Ob}$ en $\overrightarrow{Oc}$ et $\overrightarrow{Od}$ (fig. 2), $\overrightarrow{Oc}$ étant sur le support de $\overrightarrow{Oa}$ et $\overrightarrow{Od} \perp$ à $\overrightarrow{Oa}$. Déterminons un quaternion numérique q_0 et un vecteur χ tels que l'on ait:

$$\overrightarrow{Od} = \chi\ \overrightarrow{Oa} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{Oc} = q_0 \overrightarrow{Oa}.$$

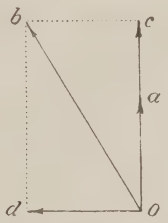

Fig. 2

D'après la définition de la somme de deux quaternions, nous pouvons écrire:

$$q \cdot \overrightarrow{Oa} = q_0 \overrightarrow{Oa} + \chi\ \overrightarrow{Oa} = (q_0 + \chi)\ \overrightarrow{Oa}$$

ou bien:

$$q = q_0 + \chi.$$

II. *Si $p = p_0 + \varpi$ et $q = q_0 + \chi$, leur somme peut s'écrire:*

$$p + q = (p_0 + q_0) + (\varpi + \chi) \ .$$

En effet, désignons par $\overrightarrow{Oa}$ un vecteur commun aux quaternions p et q, nous aurons, en construisant la somme $p + q$ (fig. 3):

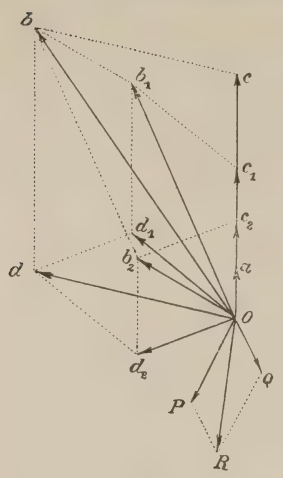

Fig. 3

$$\overrightarrow{Ob}_1 = p\,\overrightarrow{Oa} \quad , \quad \overrightarrow{Ob}_2 = q\,\overrightarrow{Oa} \quad ,$$

et si

$$\overrightarrow{Ob} = \overrightarrow{Ob}_1 + \overrightarrow{Ob}_2 \quad ,$$

on aura:

$$\overrightarrow{Ob} = (p + q)\,\overrightarrow{Oa} \quad .$$

D'autre part, d'après le théorème précédent, on aura également:

$$\overrightarrow{Oc}_1 = p_0\overrightarrow{Oa},\ \overrightarrow{Od}_1 = \varpi\,\overrightarrow{Oa}, (\overrightarrow{Od}_1 \perp \overrightarrow{Oc}_1),$$
$$\overrightarrow{Oc}_2 = q_0\overrightarrow{Oa},\ \overrightarrow{Od}_2 = \chi\,\overrightarrow{Oa}, (\overrightarrow{Od}_2 \perp \overrightarrow{Oc}_2),$$

qui vérifient les relations:

$$\overrightarrow{Ob}_1 = \overrightarrow{Oc}_1 + \overrightarrow{Od}_1 = (p_0 + \varpi)\,\overrightarrow{Oa} = (\varpi + p_0)\,\overrightarrow{Oa} \quad ,$$
$$\overrightarrow{Ob}_2 = \overrightarrow{Oc}_2 + \overrightarrow{Od}_2 = (q_0 + \chi)\,\overrightarrow{Oa} = (\chi + q_0)\,\overrightarrow{Oa} \quad .$$

Construisons les sommes:

$$\overrightarrow{Od} = \overrightarrow{Od}_1 + \overrightarrow{Od}_2 = \overrightarrow{Od}_2 + \overrightarrow{Od}_1 \quad ,$$
$$\overrightarrow{Oc} = \overrightarrow{Oc}_1 + \overrightarrow{Oc}_2 = \overrightarrow{Oc}_2 + \overrightarrow{Oc}_1 \quad ,$$

$\overrightarrow{Od}$ étant la diogonale du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{Od}_1$ et Od_2, sera perpendiculaire à $\overrightarrow{Oc}$ qui a le même support que $\overrightarrow{Oa}$. On pourra écrire:

$$\overrightarrow{Od} = \varpi\,\overrightarrow{Oa} + \chi\,\overrightarrow{Oa} = (\varpi + \chi)\,\overrightarrow{Oa} = (\chi + \varpi)\,\overrightarrow{Oa} \quad ,$$
$$\overrightarrow{Oc} = p_0\overrightarrow{Oa} + q_0\overrightarrow{Oa} = (p_0 + q_0)\,\overrightarrow{Oa} = (q_0 + p_0)\,\overrightarrow{Oa} \quad .$$

La résultante étant invariable dans l'addition des vecteurs quel que soit l'ordre des addendes, nous avons:

$$\overrightarrow{Ob} = (\overrightarrow{Oc}_1 + \overrightarrow{Od}_1) + (\overrightarrow{Oc}_2 + \overrightarrow{Od}_2)$$
$$= \overrightarrow{Oc}_1 + \overrightarrow{Oc}_2 + \overrightarrow{Od}_1 + \overrightarrow{Od}_2 = \ldots$$

et, par conséquent:

$$(p + q) = (p_0 + q_0) + (\varpi + \chi) = (q_0 + p_0) + (\chi + \varpi) = \ldots$$

L'addition des quaternions-quadrants pouvant être remplacée par celle des vecteurs correspondants, la somme $\varpi + \chi$ s'obtiendra aussi par la construction de la résultante $\overrightarrow{OR}$ des indices $\overrightarrow{OP}$ de ϖ et $\overrightarrow{OQ}$ de χ.

28. **Corollaire.** *La somme $p + q + r$ est égale au quaternion $(p_0 + q_0 + r_0) + (\varpi + \chi + \varrho)$ quel que soit l'ordre des addendes:*

$$\begin{aligned} p + q + r &= (p + q) + r = p + (q + r) \\ &= (p_0 + q_0 + r_0) + (\varpi + \chi + \varrho) = \ldots \end{aligned}$$

En effet, la somme $p + q = (p_0 + q_0) + (\varpi + \chi)$ est un quaternion $u = u_0 + v$ qui, additionné au quaternion $r = r_0 + \varrho$, donne:

$$u + r = (u_0 + r_0) + (v + \varrho) = (r_0 + u_0) + (\varrho + v) \ .$$

Nous avons donc:

$$(p + q) + r = [(p_0 + q_0) + r_0] + [(\varpi + \chi) + \varrho] \ ,$$

et de même, si l'on effectue la sommation dans un autre ordre:

$$p + (q + r) = [p_0 + (q_0 + r_0)] + [\varpi + (\chi + \varrho)] \ .$$

Mais les sommes

$$p_0 + (q_0 + r_0) \ , \ (p_0 + q_0) + r_0 \ \text{ et } \ p_0 + q_0 + r_0$$

sont identiques, car il est évident qu'on a:

$$\begin{aligned} p_0\overrightarrow{Oa} + q_0\overrightarrow{Oa} + r_0\overrightarrow{Oa} &= \{(p_0 + q_0) + r_0\}\overrightarrow{Oa} \\ &= \{p_0 + (q_0 + r_0)\}\overrightarrow{Oa} = (p_0 + q_0 + r_0)\overrightarrow{Oa} \ . \end{aligned}$$

Les sommes $(\varpi + \chi) + \varrho$ et $\varpi + (\chi + \varrho)$, qui peuvent être obtenues par l'addition des vecteurs représentatifs des quaternions-quadrants ϖ, χ et ϱ, sont égales à $\varpi + \chi + \varrho$, car la résultante des

vecteurs $\tilde{\omega}$, χ et ϱ est toujours la même quelle que soit la manière de composer les addendes. Il s'ensuit que l'on a identiquement:

$$\tilde{\omega} + (\chi + \varrho) = (\tilde{\omega} + \chi) + \varrho = (\tilde{\omega} + \chi + \varrho)$$

et nous pouvons donc bien écrire:

$$\begin{aligned} p + q + r &= (p + q) + r = p + (q + r) \\ &= (p_0 + q_0 + r_0) + (\tilde{\omega} + \chi + \varrho) \quad , \end{aligned}$$

ce qui exprime la propriété associative de l'addition. On démontrerait facilement cette égalité pour un nombre quelconque de quaternions:

$$\begin{aligned} p + q + r + s &= (p + q + r) + s = p + (q + r) + s \\ &= s + (p + r) + q = (p_0 + q_0 + r_0 + s_0) + (\tilde{\omega} + \chi + \varrho + \sigma) \, . \end{aligned}$$

2. MULTIPLICATION ET DIVISION DES QUATERNIONS.

29. **Produit de deux quaternions.** Nous définirons le produit $r = pq$ de deux quaternions p et q de la façon suivante:

Soit aOc le plan du quaternion q, dOe celui de p et $\overline{OB}$ leur intersection (fig. 4). Tout vecteur, ayant pour support $\overline{OB}$, appartiendra aux quaternions p et q. Prenons dans le plan de q un vecteur $\overrightarrow{Oa}$ tel que traité par q, il donne un vecteur $\overrightarrow{Ob_1}$ sur la droite $\overline{OB}$: $\overrightarrow{Ob_1} = q\,\overrightarrow{Oa}$. Traitons ensuite le vecteur $\overrightarrow{Ob_1}$ par le quaternion p et soit $\overrightarrow{Oe}$ le vecteur qui en résulte: $\overrightarrow{Oe} = p\,\overrightarrow{Ob_1}$. Remplaçons dans cette relation $\overrightarrow{Ob_1}$ par son expression précédente:

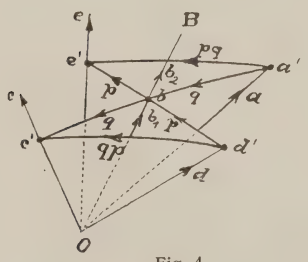

Fig. 4

$$\overrightarrow{Oe} = p(q\overrightarrow{Oa}) = pq \cdot \overrightarrow{Oa}.$$

Le quaternion transformant le vecteur $\overrightarrow{Oa}$ directement en $\overrightarrow{Oe}$ est le quaternion-produit $r = pq$ et son plan est donné par ces deux vecteurs. Les angles $a\widehat{O}b_1$, $b_1\widehat{O}e$ et $a\widehat{O}e$ sont respectivement

égaux aux amplitudes des quaternions q, p et $r = pq$, tandis que leurs grandeurs sont données par les rapports:

$$\frac{|\overrightarrow{Ob_1}|}{|\overrightarrow{Oa}|} = |q| \,, \quad \frac{|\overrightarrow{Oe}}{|\overrightarrow{Ob_1}|} = |p| \,, \quad \frac{|\overrightarrow{Oe}|}{|\overrightarrow{Oa}|} = |r| \,.$$

On définira de la même façon le produit interverti $s = qp$: on prendra dans le plan de p un vecteur $\overrightarrow{Od}$ tel que, traité par le quaternion p, il donne un vecteur $\overrightarrow{Ob_2}$ sur la droite $\overrightarrow{OB}$: $\overrightarrow{Ob_2} = p\,\overrightarrow{Od}$. En appliquant ensuite à $\overrightarrow{Ob_2}$ le quaternion q, on obtiendra un vecteur $\overrightarrow{Oc}$: $\overrightarrow{Oc} = q\,\overrightarrow{Ob_2}$, et en remplaçant $\overrightarrow{Ob_2}$ par sa valeur $p\,\overrightarrow{Od}$, on aura: $\overrightarrow{Oc} = qp \cdot \overrightarrow{Od}$. *Le quaternion-produit $s = qp$ sera le quaternion qui transforme le vecteur $\overrightarrow{Od}$ en $\overrightarrow{Oc}$.* Son plan est défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{Od}$ et $\overrightarrow{Oc}$, son amplitude est l'angle qu'ils forment, et sa grandeur est donnée par le rapport $\frac{|\overrightarrow{Oc}|}{|\overrightarrow{Od}|}$.

On voit que les deux quaternions-produits pq et qp sont distincts, leurs plans étant différents. Les vecteurs appartenant au premier, n'appartiendront généralement pas au second, car les plans dOc et aOe forment un dièdre. *L'ordre des facteurs dans un produit de quaternions ne peut donc pas être interverti.*

30. **Cas particulier:** produit mq où un des facteurs est un quaternion numérique.

Le quaternion numérique m pouvant être appliqué à n'importe quel vecteur, prenons un vecteur $\overrightarrow{Oa}$ appartenant au quaternion q. Traité par q, $\overrightarrow{Oa}$ deviendra un vecteur $\overrightarrow{Ob_1}$ qui, à son tour, par l'application du quaternion m, sera transformé en $\overrightarrow{Ob_2}$ de même direction que $\overrightarrow{Ob_1}$:

$$\overrightarrow{Ob_1} = q\,\overrightarrow{Oa} \quad , \quad \overrightarrow{Ob_2} = m\,\overrightarrow{Ob_1} \,.$$

D'après la définition précédente, le produit mq transformera $\overrightarrow{Oa}$ en $\overrightarrow{Ob_2}$. L'amplitude de mq est donc égale à celle de q et sa grandeur est celle de q multiplié par le nombre m: $|mq| = m|q|$.

Par un raisonnement fort simple on constate que tous les éléments des quaternions mq et qm sont identiques et qu'on a: $mq = qm$.

Nous en concluons que dans ce cas particulier l'ordre des facteurs n'influence pas le produit.

Remarquons que l'action d'un quaternion q se décompose en une extension et une rotation. La première est produite par le quaternion numérique qui est la grandeur $|q|$ du quaternion. La seconde est effectuée par le verseur Uq du quaternion et nous avons évidemment:

$$q = |q| \cdot Uq = Uq \cdot |q| \ .$$

31. Montrons que les quaternions $r = pq$ et $s = qp$ ont des amplitudes et des grandeurs égales.

Pour cela, de O comme centre, décrivons une sphère unité. Les plans des quaternions p et q découpent sur cette sphère des grands cercles. Soient a', b', ... les points où les vecteurs $\overrightarrow{Oa}$, $\overrightarrow{Ob_1}$, $\overrightarrow{Oc}$, ... percent cette sphère (fig. 4). Nous avons:

$$a'\widehat{Ob'} = b'\widehat{Oc'} = ampl.\, q \quad ,$$
$$d'\widehat{Ob'} = b'\widehat{Oe'} = ampl.\, p$$

et par conséquent:

$$\widehat{a'b'} = \widehat{b'c'} \quad , \quad \widehat{b'e'} = \widehat{d'b'}.$$

En additionnant membre à membre ces égalités, il vient:

$$|\widehat{a'b'} + \widehat{b'e'}| = |\widehat{d'b'} + \widehat{b'c'}| \ .$$

Mais les sommes sphériques des arcs $\widehat{a'b'}$, $\widehat{b'e'}$, et $\widehat{b'c'}$, $\widehat{d'b'}$ sont respectivement représentées par les arcs $\widehat{a'e'}$ et $\widehat{d'c'}$. On a donc:

$$|\widehat{a'e'}| = |\widehat{d'c'}| \quad ,$$

cette égalité n'ayant lieu qu'en longueur seulement, car les grands cercles auxquels appartiennent ces arcs ne sont pas équivalents.

De la dernière égalité nous tirons:

$$a'\widehat{Oe'} = d'\widehat{Oc'}$$

ou bien

$$ampl.\,(qp) = ampl.\,(pq)\ .$$

Remarquons que les arcs de même longueur, de même sens et d'un même grand cercle de la sphère unité, peuvent être considérés comme *équivalents*. Ces arcs peuvent être obtenus les uns à partir des autres par un simple glissement le long du grand cercle et peuvent, en effet, représenter l'amplitude d'un même quaternion, ou verseur, appliqué à des vecteurs différents de son plan.

Les grandeurs des quaternions $r = pq$ et $s = qp$ étant données, par définition, par les rapports:

$$\frac{|\overrightarrow{Oe}|}{|\overrightarrow{Oa}|} = |pq|\ , \quad \frac{|\overrightarrow{Oc}|}{|\overrightarrow{Od}|} = |qp|\ ,$$

il est aisé de voir qu'elles sont égales au produit des grandeurs des quaternions p et q et qu'elles sont, par suite, égales entre elles.

Nous avons, en effet (fig. 4):

$$\frac{|\overrightarrow{Ob_1}|}{|Oa|} = |q|\ , \quad \frac{|\overrightarrow{Oe}|}{|\overrightarrow{Ob_1}|} = |p|\ ,$$

$$\frac{|\overrightarrow{Ob_2}|}{|\overrightarrow{Od}|} = |p|\ , \quad \frac{|\overrightarrow{Oc}|}{|Ob_2|} = |q|\ ,$$

d'où par multiplication:

$$\frac{|\overrightarrow{Oe}|}{|\overrightarrow{Ob_1}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{Ob_1}|}{|\overrightarrow{Oa}|} = |p| \cdot |q| = \frac{|\overrightarrow{Oe}|}{|\overrightarrow{Oa}|} = |pq| = |r|$$

$$\frac{|\overrightarrow{Oc}|}{|\overrightarrow{Ob_2}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{Ob_2}|}{|\overrightarrow{Od}|} = |q| \cdot |p| = \frac{|\overrightarrow{Oc}|}{|\overrightarrow{Od}|} = |qp| = |s|\ .$$

Il en résulte que l'on a:

$$|r| = |s| = |p| \cdot |q| = |q| \cdot |p|\ ,$$

les produits $|p| \cdot |q|$ et $|q| \cdot |p|$ étant identiques.

D'après ce qui précède et par le fait que le produit de la grandeur d'un quaternion par son verseur possède la propriété commutative, nous pouvons construire les quaternions r et s en construisant tout d'abord leurs amplitudes, c. à d. en effectuant le produit des verseurs des facteurs. Les grandeurs $|q|$ et $|p|$ peuvent ensuite être facilement introduites.

Cette construction se réduit à l'addition des arcs de grands cercles de la sphère unité, $\widehat{a'b'} = \widehat{b'c'}$ et $\widehat{d'b'} = \widehat{b'e'}$, qui représentent respectivement les verseurs Uq et Up. L'addition sphérique *n'étant pas commutative, l'ordre des facteurs dans un produit de quaternions doit être maintenu.*

32. **Cas particuliers.** a) *Carré d'un quaternion.*

Si dans le produit pq, le quaternion p tend vers q, le point d' tendra vers le point a' et le point e' vers c', tandis que les arcs $\widehat{d'b'} = \widehat{b'e'}$ tendent à devenir égaux aux arcs $\widehat{a'b'} = \widehat{b'c'}$ (fig. 4). A la limite on obtient:

$$\overrightarrow{Oa} = \overrightarrow{Od} \quad , \quad \overrightarrow{Oc} = \overrightarrow{Oe} \quad ,$$
$$\overrightarrow{Oc} = q \cdot q \, \overrightarrow{Oa} = q^2 \, \overrightarrow{Oa} \quad .$$

L'amplitude de q^2, qui est donnée par l'arc $\widehat{a'c'} = \widehat{a'b'} + \widehat{b'c'} = 2\,\widehat{a'b'}$ est le double de l'amplitude de q, sa grandeur est égale au carré de la grandeur de q et les rotations produites par ces deux quaternions sont de même sens.

b) *Produit de deux quaternions-quadrants ou vecteurs.*

Nous supposerons avoir affaire à deux verseurs-quadrants $\tilde{\omega}$ et χ, dont les vecteurs représentatifs sont des vecteurs-unités $\overrightarrow{OP'}$ et $\overrightarrow{OQ'}$. Pour passer au cas général, il suffira d'introduire les facteurs numériques $|\tilde{\omega}|$ et $|\chi|$, qui sont commutatifs dans leur multiplication avec les quaternions.

Soit $\overrightarrow{Oa'}$ le vecteur initial, appartenant à χ (fig. 5). Traité par le verseur χ, il devient $\overrightarrow{Ob'}$ et on a:

$$\overrightarrow{Ob'} = \chi \, \overrightarrow{Oa'} \quad \text{et} \quad \widehat{a'b'} = 90^0 \quad .$$

Si $\overrightarrow{Ob'}$ appartient à $\tilde{\omega}$, on aura, en le traitant par ce verseur

$$\overrightarrow{Oe'} = \tilde{\omega} \cdot \overrightarrow{Ob'} = \tilde{\omega}\chi \cdot \overrightarrow{Oa'} \text{ et } \widehat{b'e'} = 90^0$$

de la sorte que $\overrightarrow{Ob'}$ étant $\perp$ aux vecteurs représentatifs $\overrightarrow{OP'}$ et $\overrightarrow{OQ'}$ des verseurs $\tilde{\omega}$ et χ, les vecteurs $\overrightarrow{Oa'}$ et $\overrightarrow{Oe'}$ se trouveront dans le plan de ces vecteurs. Ce plan est donc le plan du verseur-produit $r = \tilde{\omega}\chi$.

D'autre part, puisque $\overrightarrow{Oa'} \mid \overrightarrow{OQ'}$ et $\overrightarrow{Oe'} \perp \overrightarrow{OP'}$, on a:

$$ampl.\, r = ampl.\, \tilde{\omega}\chi = \widehat{a'Oe'}$$
$$= 180^0 - \widehat{P'OQ'} \ ,$$

le sens de rotation allant de $\overrightarrow{OP'}$ vers $\overrightarrow{OQ'}$.

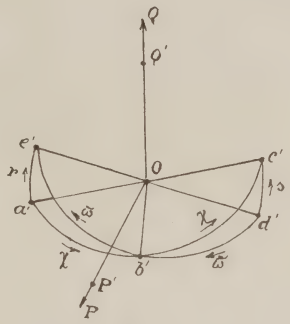

Fig. 5

Par une construction analogue, on trouvera le produit inverse $s = \chi\tilde{\omega}$ qui sera représenté par l'arc $\widehat{d'c'}$, sur le même grand cercle que $\widehat{a'e'}$, égal à ce dernier, mais de sens inverse.

Les verseurs $r = \tilde{\omega}\chi$ et $s = \chi\tilde{\omega}$ sont donc conjugués:

$$K(\tilde{\omega}\chi) = \chi\tilde{\omega}.$$

En introduisant les grandeurs $|\tilde{\omega}|$ et $|\chi|$, on passera aisément au cas général, qu'on peut énoncer comme suit:

Le produit de deux vecteurs quelconques $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ est un quaternion ayant pour plan le plan de ces vecteurs, dont l'amplitude est l'angle supplémentaire de l'angle des vecteurs et dont la grandeur est égale au produit des longueurs des vecteurs. L'inversion de l'ordre des vecteurs dans le produit ne change que le sens de rotation du quaternion-produit, les autres éléments restent les mêmes.

Nous pouvons encore dire que le produit $\tilde{\omega}\chi$ de deux vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ d'une part, et le quaternion transformant $\overrightarrow{OP}$ en $\overrightarrow{OQ}$

d'autre part, ont un même plan, leurs amplitudes sont supplémentaires et possèdent le même sens de rotation. Leurs grandeurs sont respectivement:

$$|\tilde{\omega}| \cdot |\chi| \quad \text{et} \quad \frac{|\chi|}{|\tilde{\omega}|} \ .$$

En évaluant les valeurs des composantes des quaternions définis par le produit $\tilde{\omega}\chi$ et par le rapport $\frac{\chi}{\tilde{\omega}}$ de deux vecteurs $\tilde{\omega}$ et χ, dont les longueurs respectives sont $|\tilde{\omega}|$ et $|\chi|$ et qui forment un angle A, on trouve aisément:

$$\tilde{\omega}\chi = -(\tilde{\omega}\chi) + [\tilde{\omega}\chi] = -|\tilde{\omega}||\chi| \cos A + |\tilde{\omega}||\chi| \sin A = r_0 + \varrho \ ,$$

$$\frac{\chi}{\tilde{\omega}} = \frac{(\tilde{\omega}\chi)}{|\tilde{\omega}|^2} + \frac{[\tilde{\omega}\chi]}{|\tilde{\omega}|^2} = \frac{|\chi|}{|\tilde{\omega}|} \cos A + \frac{|\chi|}{|\tilde{\omega}|} \sin A \ .$$

33. **Division de deux quaternions.** *Etant donnés deux quaternions p et q, il existe toujours un et un seul quaternion s tel que l'on ait*

$$sq = p$$

et un et un seul quaternion t tel que

$$qt = p.$$

Ecrivons tout d'abord les grandeurs de s et de t, qui sont définies par les équations:

$$|s|\,|q| = |p| \quad \text{et} \quad |q|\,|t| = |p|$$

Nous en tirons: $|s| = |t| = \frac{|p|}{|q|}$.

Pour déterminer les plans et les amplitudes des quaternions-quotients s et t, nous supposerons que q et p sont des verseurs. Soient $\overrightarrow{Ob'}$ le vecteur commun aux verseurs p et q, $\widehat{a'b'} = \widehat{b'c'}$ l'arc représentatif de q et $\widehat{d'b'} = \widehat{b'e'}$ celui du verseur p (fig. 6).

D'après la définition du produit des quaternions, les arcs $\widehat{d'a'}$ et $\widehat{c'e'}$ représenteront les verseurs cherchés t et s, car on a:

$$\widehat{d'a'} + \widehat{a'b'} = \widehat{d'b'} \quad , \text{ c. à d. } qt = p \ ;$$
$$\widehat{b'c'} + \widehat{c'e'} = \widehat{b'e'} \quad , \text{ c. à d. } sq = p \ .$$

Tous les éléments des quaternions s et t se trouvent ainsi déterminés sans ambiguïté.

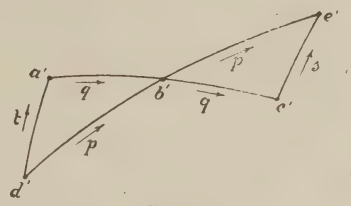

Fig. 6

Considérons en particulier le rapport de deux quaternions-quadrants $\tilde{\omega}$ et χ:

$$\frac{\tilde{\omega}}{\chi} = \frac{1}{\chi}\tilde{\omega} = t \ ,$$
$$\frac{\tilde{\omega}}{\chi} = \tilde{\omega}\frac{1}{\chi} = s \ .$$

Soient $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ (fig. 7) les vecteurs représentatifs de $\tilde{\omega}$ et χ, dont les arcs sont respectivement:

$$\widehat{d'b'} = \widehat{b'e'} = 90^0 \ ,$$
$$\widehat{a'b'} = \widehat{b'c'} = 90^0 \ .$$

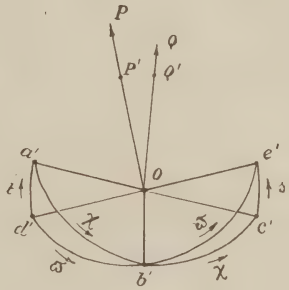

Fig. 7

Par une construction analogue à celle employée pour représenter le produit de deux vecteurs, nous déterminons les arcs des quaternions s et t et nous arrivons au résultat suivant: *le rapport de deux vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ est un quaternion qui transforme $\overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{OP}$.*

Les quaternions s et t, définis par les conditions

$$s\chi = \tilde{\omega} \quad , \quad \chi t = \tilde{\omega}$$

sont conjugués, comme on le voit aisément par la figure:

$$\bar{s} = K\left(\tilde{\omega}\frac{1}{\chi}\right) \qquad \frac{1}{\bar{\chi}}\bar{\tilde{\omega}} = \frac{1}{-\chi}(-\tilde{\omega}) = \frac{1}{\chi}\tilde{\omega} = t \ .$$

3. PROPRIÉTÉS DISTRIBUTIVE ET ASSOCIATIVE DE LA MULTIPLICATION.

34. **Théorème.** *Etant donnés trois quaternions quelconques p, q et s, on a identiquement:*

$$(p + q)s = ps + qs \quad ,$$
$$s(p + q) = sp + sq \quad .$$

Avant de donner la démonstration du cas général de trois quaternions quelconques, nous établiront tout d'abord les 4 cas particuliers suivants.

1) *p, q et s sont des quaternions numériques.* Les quaternions numériques pouvant être identifiés aux nombres, nous avons évidemment:

$$(p_0 + q_0)s_0 = p_0 s_0 + q_0 s_0 \quad ,$$
$$s_0(p_0 + q_0) = s_0 p_0 + s_0 q_0 \quad .$$

2) *$p = p_0$ et $q = q_0$ sont numériques et $s = \sigma$ est un quaternion-quadrant:*

$$(p_0 + q_0)\sigma = p_0\sigma + q_0\sigma \quad .$$

Nous avons vu que la multiplication d'un quaternion par un quaternion numérique ne change que la grandeur de ce quaternion, tous ses autres éléments restant invariables. Si donc nous appliquons σ à un vecteur quelconque $\overrightarrow{Oa}$, le vecteur $\overrightarrow{Ob}$ qui en résulte doit être multiplié par $(p_0 + q_0)$ si l'on veut obtenir l'effet du premier membre. L'effet du second membre sera obtenu par la multiplication successive de $\overrightarrow{Ob}$ par p_0 et q_0 et par l'addition des vecteurs $\overrightarrow{Ob}_1$ et $\overrightarrow{Ob}_2$ qui vérifient les relations:

$$\overrightarrow{Ob}_1 = p_0\overrightarrow{Ob} = p_0\sigma\,\overrightarrow{Oa} \quad , \quad \overrightarrow{Ob}_2 = q_0\overrightarrow{Ob} = q_0\sigma\,\overrightarrow{Oa} \quad .$$

Il est évident que dans les deux cas on arrive finalement à un même vecteur $\overrightarrow{Oc}$, et nous pouvons écrire:

$$\overrightarrow{Oc} = (p_0 + q_0)\overrightarrow{Ob} = p_0\overrightarrow{Ob} + q_0\overrightarrow{Ob} = (p_0 + q_0)\sigma\overrightarrow{Oa}$$
$$= \overrightarrow{Ob}_1 + \overrightarrow{Ob}_2 = p_0\sigma\overrightarrow{Oa} + q_0\sigma\overrightarrow{Oa} \quad ,$$

d'où

$$(p_0 + q_0)\sigma = p_0\sigma + q_0\sigma \quad .$$

La multiplication d'un quaternion par un quaternion numérique étant commutative, nous aurons aussi:

$$\sigma(p_0 + q_0) = \sigma p_0 + \sigma q_0 \quad .$$

3). *Les quaternions* $p = \tilde{\omega}$ *et* $q = \chi$ *sont rectangles et* $\sigma = s_0$ *est un quaternion numérique.*

Nous avons à démontrer la relation:

$$(\tilde{\omega} + \chi)s_0 = \tilde{\omega}s_0 + \chi s_0$$

ou bien, en intervertissant les facteurs: $s_0(\tilde{\omega} + \chi) = s_0\tilde{\omega} + s_0\chi$.

L'addition des quaternions-rectangles $\tilde{\omega}$ et χ peut être effectuée par l'addition de leurs vecteurs représentatifs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$, et le vecteur $\overrightarrow{OR}$, correspondant à la somme de $\tilde{\omega}$ et de χ, est donné par la diagonale du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$:

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \quad .$$

La multiplication par un quaternion numérique ne changeant que la grandeur du quaternion rectangle, le vecteur représentatif de $s_0\chi$ s'obtient de $\overrightarrow{OQ}$ en multipliant celui-ci par le facteur s_0, et la proposition que nous voulons démontrer s'écrit:

$$s_0\overrightarrow{OR} = s_0\overrightarrow{OP} + s_0\overrightarrow{OQ} \quad ,$$

égalité qui est évidente.

4). Il nous reste le dernier cas particulier de trois quaternions-quadrants $\tilde{\omega}$, χ et σ.

Soient $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OS}$ leurs vecteurs représentatifs. La somme $(\tilde{\omega} + \chi)$ sera représentée par un vecteur $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. La relation $(\tilde{\omega} + \chi)\sigma = \tilde{\omega}\sigma + \chi\sigma$ s'écrit, si l'on remplace les quaternions-quadrants par les vecteurs équivalents:

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OS} \quad .$$

Or, cette dernière égalité résulte premièrement de la définition de la somme de deux quaternions et deuxièmement du fait que le produit de deux vecteurs est un quaternion dont le plan passe par les deux vecteurs, l'amplitude est supplémentaire de l'angle de ces deux vecteurs et la grandeur égale au produit de leurs longueurs.

En effet, prenons $\overrightarrow{OS'}$ opposé à $\overrightarrow{OS}$ (fig. 8) et tel que l'on ait

$$\frac{1}{|\overrightarrow{OS'}|} = |\overrightarrow{OS}| \ .$$

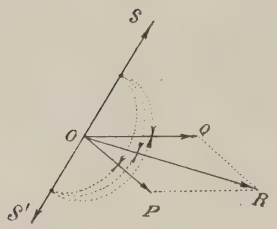

Fig. 8

Nous aurons:

$$\overrightarrow{OR} = \{\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OS}\}\overrightarrow{OS'} \ ,$$

où

$$\frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OS'}|} = |\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OS}| = |\overrightarrow{OR}| \cdot |\overrightarrow{OS}| \ ,$$

et où $\{\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OS}\}$ désigne le quaternion, produit de deux vecteurs. De même:

$$\overrightarrow{OP} = \{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OS}\}\overrightarrow{OS'} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OQ} = \{\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OS}\}OS' \ ,$$

car on a:

$$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OS'}|} = |\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OS}| = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OS}| \ ,$$

$$\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OS'}|} = |\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OS}| = |\overrightarrow{OQ}| \cdot |\overrightarrow{OS}| \ .$$

La relation $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ nous permet d'écrire:

$$\{\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OS}\}\overrightarrow{OS'} = \{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OS}\}\overrightarrow{OS'} + \{\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OS}\}\overrightarrow{OS'}$$

et la proposition se trouve démontrée.

Un raisonnement analogue justifiera le second cas:

$$\sigma(\tilde{\omega} + \chi) = \sigma\tilde{\omega} + \sigma\chi \ .$$

Cas général. Si $q = q_0 + \chi$ est un quaternion qui transforme un vecteur unité $\overrightarrow{Oa}$ en un autre vecteur $\overrightarrow{Ob}$, nous avons, en désignant pour abréger $\overrightarrow{Oa}$ par x et $\overrightarrow{Ob}$ par y:

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= (xy) \\ \chi &= [xy] \end{aligned}\right\} \quad \text{où} \quad (xx) = 1 \ .$$

Soit $p = p_0 + \tilde{\omega}$ un quaternion transformant $\overrightarrow{Ob}$ en $\overrightarrow{Oc}$ ou z. Montrons qu'on a:

$$r = pq = (p_0 + \tilde{\omega})(q_0 + \chi) = p_0 q_0 + q_0 \tilde{\omega} + p_0 \chi + \tilde{\omega}\chi \quad .$$

Pour le prouver, il faut démontrer que les relations

$$r_0 = p_0 q_0 + (\tilde{\omega}\chi) \quad ,$$
$$\varrho = p_0 \chi + q_0 \tilde{\omega} + [\tilde{\omega}\chi]$$

sont vérifiées.

Le quaternion r qui transforme $\overrightarrow{Oa}$ en $\overrightarrow{Oc}$ est donné par la somme $r = r_0 + \varrho = (x,z) + [x,z]$, où nous avons pris $|x| = 1$. Décomposons les vecteurs $\overrightarrow{Oa}$ et $\overrightarrow{Oc}$ parallélement et perpendiculairement à $\overrightarrow{Ob}$ et désignons par x_1 et z_1 leurs composantes longitudinales et par x_2 et z_2 leurs composantes transversales, de sorte que $x = x_1 + x_2$ et $z = z_1 + z_2$.

Rappelons les propriétés suivantes des produits intérieur et extérieur de deux vecteurs:

$$(x,z) = (x_1 + x_2 \, , \, z_1 + z_2) = (x_1 \, , \, z_1) + (x_2 \, , \, z_2) \quad ,$$
$$[x,z] = [x_1 + x_2 \, , \, z_1 + z_2] = [x_1 \, , \, z_2] + [x_2 \, , \, z_1] + [x_2 \, , \, z_2]$$

qu'on établit aisément par des considération géométriques. Nous avons, en effet:

$$(x,z) = |x| \cdot |z| \cos(\widehat{xz}) = |x| \{ |z_1| \cos(\widehat{xy}) + |z_2| \cos(\widehat{x_2 z_2}) \cos(\widehat{x_2 x}) \}$$
$$= |x| |z_1| \cos(\widehat{xy}) + |x| \, |z_1| \cos(\widehat{x_2 z_2}) \cos(\widehat{x_2 x}) \quad .$$

Mais $x \cos(\widehat{xy}) = x_1$ et $x \cos(\widehat{x_2 x}) = x_2$ et il s'ensuit:

$$(x,z) = |x_1| |z_1| + |x_2| |z_2| \cos(\widehat{x_2 z_2}) = (x_1 \, , \, z_1) + (x_2 \, , \, z_2) \quad ,$$

car $\cos(\widehat{x_1 z_1}) = \cos 0^0 = 1$.

De même pour la seconde formule

$$[x,z] = |x| |z| \sin(\widehat{xz}) = |x| \{ |z_1| \sin(\widehat{xy}) + |z_2| \sin(\widehat{xz_2}) \} \quad ,$$

et comme on a:

$$|x| \sin(\widehat{xy}) = |x_2| \quad \text{et} \quad |x| \sin(\widehat{xz_2}) = |x_1| + |x_2| \sin(\widehat{x_2 z_2}) \quad ,$$

il vient:

$$[x,z] = |x_2||z_1| + |x_1||z_2| + |x_2||z_2| \sin(\widehat{x_2 z_2})$$
$$= [x_2 , z_1] + [x_1 , z_2] + [x_2 , z_2] \quad ,$$

les composantes x_2 et z_2 étant respectivement perpendiculaires aux composantes z_1 et x_1.

Evaluons x_1, x_2, z_1 et z_2. Le vecteur y dérivant de x par l'application du quaternion q, inversement, x dérive de y par l'application du quaternion réciproque q^{-1}. Il n'est pas difficile de s'assurer de l'identité:

$$q^{-1} = \frac{q_0}{|q|^2} + \frac{\chi'}{|q|^2} \quad ,$$

où χ' désigne le vecteur opposé à χ, $\chi' = -\chi$.

Le quaternion q^{-1} transformant y en x, nous avons:

$$x_1 = \frac{q_0}{|q|^2} y \quad , \quad x_2 = \frac{\chi'}{|q|^2} y \quad .$$

De même, le quaternion p transformant y en z, $z_1 = p_0 y$ et $z_2 = \tilde{\omega} y$. Formons les produits $[x_1 , z_2]$, $[x_2 , z_1]$ et $[x_2 , z_2]$:

$$[x_1 , z_2] = x_1 z_2 , \quad \text{d'où:} \quad |x_1| \cdot |z_2| = \frac{q_0}{|q|^2} |y| \cdot |\tilde{\omega}| |y| = q_0 |\tilde{\omega}| \quad ;$$

$$[x_2 , z_1] = x_2 z_1 , \quad \text{d'où:} \quad |x_2| \cdot |z_1| = \frac{|x'|}{|q|^2} |y| \cdot p_0 |y| = p_0 |\chi'| \quad ;$$

$$[x_2 , z_2] = |x_2| \cdot |z_2| \sin(\widehat{x_2 z_2}) = \frac{|\chi'|}{|q|^2} |y| \cdot |\tilde{\omega}| |y| \sin(\widehat{x_2 z_2})$$
$$= |\chi'| |\tilde{\omega}| \sin(\widehat{x_2 z_2}) \quad ,$$

car $|y| = |q||x| = |q|$.

Mais $[x_1 , z_2]$ et $[x_2 , z_1]$ sont représentés par des vecteurs dont les supports se confondent avec ceux des vecteurs $\tilde{\omega}$ et χ. Nous pouvons donc écrire, les grandeurs de χ et de χ' étant identiques,

$$[x_1 , z_2] = q_0 \tilde{\omega} \quad , \quad [x_2 , z_1] = p_0 \chi \quad .$$

L'angle formé par les composantes x_2 et z_2 est égal à l'angle compris entre les vecteurs χ' et $\tilde{\omega}$, de sorte que

$$[x_2 , z_2] = [\chi' , \tilde{\omega}] = [\tilde{\omega} , \chi] \quad .$$

En portant ces valeurs dans les formules donnant (x,z) et $[x,z]$ en fonction de leurs composantes, nous obtenons:

$$\begin{aligned} r_0 &= (x,z) = p_0 q_0 + (\tilde{\omega},\chi) \quad , \\ \varrho &= [x,z] = p_0 \chi + q_0 \tilde{\omega} + [\tilde{\omega},\chi] \end{aligned}$$

et la formule énoncée se trouve démontrée.

En s'appuyant sur la formule que nous venons d'établir, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} (p + q)s &= [(p_0 + q_0) + (\tilde{\omega} + \chi)](s_0 + \sigma) \\ &= (p_0 + q_0)s_0 + (p_0 + q_0)\sigma + (\tilde{\omega} + \chi)s_0 + (\tilde{\omega} + \chi)\sigma \end{aligned}$$

et la règle distributive de la multiplication étant vérifiée par les 4 produits du second membre

$$\begin{aligned} (p + q)s &= p_0 s_0 + q_0 s_0 + p_0 \sigma + q_0 \sigma + \tilde{\omega} s_0 + \chi s_0 + \tilde{\omega}\sigma + \chi\sigma \\ &= (p_0 s_0 + p_0 \sigma + s_0 \tilde{\omega} + \tilde{\omega}\sigma) + (q_0 s_0 + q_0 \sigma + s_0 \chi + \chi\sigma) \\ &= (p_0 + \tilde{\omega})(s_0 + \sigma) + (q_0 + \chi)(s_0 + \sigma) \quad , \end{aligned}$$

nous avons:

$$(p + q)s = ps + qs.$$

L'autre cas $s(p + q) = sp + sq$ est justifiable par un raisonnement tout à fait analogue.

On peut facilement étendre la règle distributive aux produits de polynômes. On a, en effet:

$$\begin{aligned} (p + q + r)s &= \{(p + q) + r\}s = (p + q)s + rs = ps + qs + rs \, , \\ (p + q)(s + t) &= p(s + t) + q(s + t) = ps + pt + qs + qt \, . \end{aligned}$$

35. **Théorème.** *Dans un produit de quaternions, les facteurs peuvent être groupés à volonté sans que la valeur du produit soit modifiée:*

$$\begin{aligned} pq \cdot r &= p \cdot qr \quad , \\ pq \cdot rs &= p \cdot qrs = \ldots \quad . \end{aligned}$$

Pour obtenir le produit de trois quaternions quelconques, on multiplie tout d'abord deux de ces quaternions, puis le résultat de ce produit partiel est multiplié par le troisième facteur, l'ordre des facteurs étant strictement maintenu. On procédera de même si le nombre des facteurs est supérieur à 3 ou bien on effectuera tout d'abord les produits partiels de différents groupes de quaternions pris deux à deux, l'ordre de ces groupes restant le même dans le produit final: $pqrstu = (pq)(rs)(tu)$.

Montrons que les deux produits $pq \cdot r$ et $p \cdot qr$ sont identiques. Désignons par s et t les quaternions-produits pq et qr. Nous aurons:

$$s = s_0 + \sigma = (p_0 + \tilde{\omega})(q_0 + \chi) = p_0 q_0 + p_0 \chi + q_0 \tilde{\omega} + \tilde{\omega}\chi \ ,$$
$$t = t_0 + \tau = (q_0 + \chi)(r_0 + \varrho) = q_0 r_0 + q_0 \varrho + r_0 \chi + \chi\varrho \ ,$$

ou bien:

$$s_0 = p_0 q_0 + (\tilde{\omega},\chi) \ , \quad \sigma = p_0 \chi + q_0 \tilde{\omega} + [\tilde{\omega},\chi] \ ,$$
$$t_0 = q_0 r_0 + (\chi,\varrho) \ , \quad \tau = q_0 \varrho + r_0 \chi + [\chi,\varrho] \ .$$

Avec ces notations, nous devons démontrer l'égalité:

$$sr = pt$$

qui s'écrit: $(s_0 + \sigma)(r_0 + \varrho) = (p_0 + \tilde{\omega})(t_0 + \tau)$ et, grâce à la règle distributive, prend la forme:

$$s_0 r_0 + s_0 \varrho + r_0 \sigma + \sigma\varrho = p_0 t_0 + p_0 \tau + t_0 \tilde{\omega} + \tilde{\omega}\tau \ .$$

Substituons les valeurs de s_0, σ, t_0 et τ et effectuons les produits; on obtient:

$$p_0 q_0 r_0 + r_0(\tilde{\omega},\chi) + r_0 p_0 \chi + r_0 q_0 \tilde{\omega} + r_0[\tilde{\omega},\chi] + p_0 q_0 \varrho + (\tilde{\omega},\chi)\varrho + p_0 \chi\varrho + q_0 \tilde{\omega}\varrho + [\tilde{\omega},\chi]\varrho$$
$$= p_0 q_0 r_0 + p_0(\chi,\varrho) + q_0 r_0 \tilde{\omega} + (\chi,\varrho)\tilde{\omega} + p_0 q_0 \varrho + p_0 r_0 \chi + p_0[\chi,\varrho] + q_0 \tilde{\omega}\varrho + r_0 \tilde{\omega}\chi + \tilde{\omega}[\chi,\varrho].$$

En réduisant dans les deux membres les termes identiques, on en tire:

$$r_0(\tilde{\omega},\chi) + r_0[\tilde{\omega},\chi] + (\tilde{\omega},\chi)\varrho + p_0 \chi\varrho + [\tilde{\omega},\chi]\varrho = p_0(\chi,\varrho) + \tilde{\omega}(\chi,\varrho) + p_0[\chi,\varrho] + r_0 \tilde{\omega}\chi + \tilde{\omega}[\chi,\varrho].$$

Mais nous avons vu que le produit de deux vecteurs quelconques $\tilde{\omega}$ et χ est donné par la relation

$$\tilde{\omega}\chi = (\tilde{\omega},\chi) + [\tilde{\omega},\chi] \ ,$$

et l'égalité précédente s'écrit:

$$r_0\tilde{\omega}\chi + \tilde{\omega}\chi \cdot \varrho + p_0\chi\varrho = p_0\chi\varrho + \tilde{\omega} \cdot \chi\varrho + r_0\tilde{\omega}\chi$$

ou bien encore:

$$\tilde{\omega}\chi \cdot \varrho = \tilde{\omega} \cdot \chi\varrho \ .$$

Pour faire voir que cette dernière équation est une identité, décomposons le vecteur ϱ suivant $\tilde{\omega}$, χ et un troisième vecteur λ perpendiculaire aux précédents, et soit

$$\varrho = a\,\tilde{\omega} + b\,\chi + c\,\lambda \ .$$

En remplaçant ϱ par cette expression et en remarquant que le produit des coefficients numériques a , b , c avec les quaternions est commutatif, nous arrivons finalement à la relation

$$a\,\tilde{\omega}\chi \cdot \tilde{\omega} + b\,\tilde{\omega}\chi \cdot \chi + c\,\tilde{\omega}\chi \cdot \lambda = a\,\tilde{\omega} \cdot \chi\tilde{\omega} + b\,\tilde{\omega} \cdot \chi\chi + c\,\tilde{\omega} \cdot \chi\lambda$$

qui sera justifiée par l'identification des trois équations suivantes:

$$\tilde{\omega}\chi \cdot \tilde{\omega} = \tilde{\omega} \cdot \chi\tilde{\omega} \quad , \quad \tilde{\omega}\chi \cdot \chi = \tilde{\omega} \cdot \chi\chi \quad , \quad \tilde{\omega}\chi \cdot \lambda = \tilde{\omega} \cdot \chi\lambda \ ,$$

où les vecteurs $\tilde{\omega}$ et χ sont perpendiculaires à λ. Or, ces trois cas particuliers sont très faciles à démontrer. Les grandeurs des deux membres étant évidemment égales, montrons que les autres éléments sont identiques.

Soient $\widehat{d'a'} = \widehat{a'b'} = 90^0$ l'arc représentatif du vecteur χ, $\widehat{b'c'} = \widehat{c'd'} = 90^0$ celui du vecteur $\tilde{\omega}$ et $\widehat{e'a'} = \widehat{a'f'} = 90^0$ l'arc du vecteur λ, qui forment en a', c' et g' des angles droits avec les grands cercles passant par b' et d' (fig. 9). Nous avons, abstraction faite des longueurs des vecteurs,

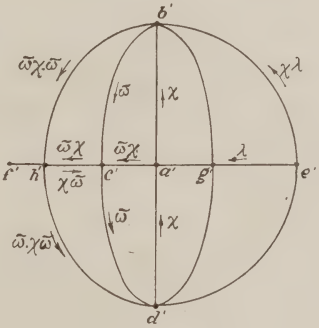

Fig. 9

$$\tilde{\omega}\chi = \widehat{a'b'} + \widehat{b'c'} = \widehat{a'c'} = \widehat{c'h'} \ , \ \chi\tilde{\omega} = \widehat{c'd'} + \widehat{d'a'} = \widehat{c'a'} = \widehat{h'c'}$$

et par conséquent:

$$\tilde{\omega}\chi \cdot \tilde{\omega} = \widehat{b'c'} + \widehat{c'h'} = \widehat{b'h'} = \widehat{h'd'} = 90^0 \ ,$$

de même que $\tilde{\omega} \cdot \chi\tilde{\omega} = \widehat{h'c'} + \widehat{c'd'} = \widehat{h'd'}$ c. à d. $\tilde{\omega} \cdot \chi\tilde{\omega} = \tilde{\omega}\chi \cdot \tilde{\omega}$.

Par une construction analogue on obtient:

$$\chi\chi = \widehat{d'a'} + \widehat{a'b'} = \widehat{d'a'b'} \ ,$$

$$\tilde{\omega} \cdot \chi\chi = \widehat{d'a'b'} + \widehat{b'c'} = \widehat{d'c'} = -\tilde{\omega} = \widehat{d'a'} + \widehat{a'c'} = \tilde{\omega}\chi \cdot \chi \ ,$$

ainsi que:

$$\chi\lambda = \widehat{e'a'} + \widehat{a'b'} = \widehat{e'b'} = 90^0 \ ,$$

$$\tilde{\omega} \cdot \chi\lambda = \widehat{e'b'} + \widehat{b'c'} = \widehat{e'c'} = \widehat{e'a'} + \widehat{a'c'} = \tilde{\omega}\chi \cdot \lambda \ .$$

La formule $pqr = p \cdot qr = pq \cdot r$ étant prouvée, nous avons immédiatement sa généralisation:

$$pqrs = (pq)r \cdot s = pq \cdot rs \ ,$$

où on suppose le produit pq effectué.

4. RÉDUCTION DE TROIS QUATERNIONS AU MÊME DÉNOMINATEUR.

36. Dans l'addition de deux quaternions, nous avons appliqué les deux addendes à un même vecteur qui avait pour support la droite d'intersection de leurs plans. La même méthode s'applique sans aucune complication au cas où plusieurs quaternions $p, q, r, \ldots$ ont tous un même vecteur commun et leur quaternion-somme sera donc construit immédiatement à partir d'un vecteur commun quelconque $\overrightarrow{Oa}$. On pourra alors écrire

$$\frac{\overrightarrow{Ob}}{\overrightarrow{Oa}} = p \ , \quad \frac{\overrightarrow{Oc}}{\overrightarrow{Oa}} = q \ , \quad \frac{\overrightarrow{Od}}{\overrightarrow{Oa}} = r \ , \ldots$$

et la somme $p + q + r + \ldots$ sera donnée par:

$$\frac{\overrightarrow{OR}}{\overrightarrow{Oa}} = \frac{\overrightarrow{Ob}}{\overrightarrow{Oa}} + \frac{\overrightarrow{Oc}}{\overrightarrow{Oa}} + \frac{\overrightarrow{Od}}{\overrightarrow{Oa}} + \ldots = p + q + r + \ldots \ ,$$

où $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc} + \overrightarrow{Od} + \ldots$ est la résultante des vecteurs $\overrightarrow{Ob}, \overrightarrow{Oc}, \ldots$

Dans le cas général de plusieurs quaternions quelconques, la construction de leur somme s'effectue par étapes, comme nous l'avons montré plus haut. On peut cependant obtenir la somme de trois quaternions par une construction directe, mais, dans le cas général, cette construction n'est possible que pour trois quaternions.

La méthode consiste à multiplier les trois quaternions par un même verseur, choisi de la sorte que l'on obtienne trois quaternions-quadrants, ou vecteurs, qui peuvent alors être additionnés immédiatement. La somme cherchée sera obtenue par la division de la résultante des trois vecteurs par le verseur auxiliaire employé.

37. **Théorème.** *Il existe toujours un verseur s tel que les 6 produits ps, qs, rs et sp, sq, sr sont 6 vecteurs α, β, γ et α', β', γ'.*

Il ne s'agit ici que des amplitudes des produits ps, qs, ... les longueurs des vecteurs α, β ... pouvant être absolument quelconques.

Dans les triangles sphériques donnant les produits des *verseurs* p, s, q, s, ..., les côtés représentant les verseurs-produits ps, qs, ... doivent être égaux à 90^0, de sorte que si nous désignons par $(\widehat{PS})$, $(\widehat{QS})$, ... les angles formés par les normales aux plans de p et de s, de q et de s, ... les points P, Q, S, ... étant respectivement les pôles de ces plans, nous pourrons écrire:

$$\cos \widehat{p} \cos \widehat{s} + \sin \widehat{p} \sin \widehat{s} \cos(180^0 - (\widehat{PS})) = 0 \ ,$$

et deux formules analogues pour deux autres triangles, où $\widehat{p}$, $\widehat{q}$ ... désignent les arcs représentatifs des verseurs correspondants. Nous en tirons:

$$\frac{\cos(\widehat{PS})}{\cot \widehat{p}} = \frac{\cos(\widehat{QS})}{\cot \widehat{q}} = \frac{\cos(\widehat{RS})}{\cot \widehat{r}} = \cot \widehat{s} \ .$$

La position du pôle S du verseur s rapporté aux pôles P, Q et R de p, q et r, est parfaitement déterminée par ces 3 équations, dont chacune exprime que S se trouve dans un plan passant par le pôle correspondant P, Q ou R .

Pour avoir tous les éléments nécessaires à la construction de S, écrivons la relation existant entre les 6 distances sphériques des 4 points P, Q, R et S. En désignant par a, b, c les cosinus des arcs connus $\widehat{QR}$, $\widehat{RP}$ et $\widehat{PQ}$, et par x, y et z ceux des arcs inconnus $\widehat{PS}$, $\widehat{QS}$, $\widehat{RS}$, on a

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ x, & 1, & c, & b \\ y, & c, & 1, & a \\ z, & b, & a, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous écrivons $\cot \widehat{p} = e$, $\cot \widehat{q} = f$, $\cot \widehat{r} = g$, $\cot \widehat{s} = u$, nous avons $x = eu$, $y = fu$, $z = gu$, et le déterminant développé donne:

$$u^2 = \frac{B}{A} ,$$

où

$$B = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1 ,$$

$$A = e^2(a^2-1) + f^2(b^2-1) + g^2(c^2-1) + 2\{ef(c-ab) + fg(a-bc) + ge(b-ac)\} .$$

Nous verrons un peu plus loin que le radical $\sqrt{\frac{B}{A}}$ est toujours réel et que le pôle S existe toujours. Soit u la valeur positive et u_1 la valeur négative de cette racine; on aura:

$$\cot \widehat{s} = u \quad , \quad \cot \widehat{s_1} = u_1 = -u = \cot (180^0 - \widehat{s}).$$

Nous avons deux solutions possibles, $\widehat{s}$ et $\widehat{s_1} = 180^0 - \widehat{s}$. A la valeur de u_1 correspondent x_1, y_1 et z_1, vérifiant les équations:

$$x_1 = -x \quad , \quad y_1 = -y \quad , \quad z_1 = -z .$$

Si à x, y, z, correspondent les arcs $\widehat{PS}$, $\widehat{QS}$ et $\widehat{RS}$, les valeurs x_1, y_1 et z_1 déterminent les arcs $\widehat{PS_1}$, $\widehat{QS_1}$ et $\widehat{RS_1}$, supplémentaires des précédents. Les pôles S et S_1 sont donc opposés et les verseurs s et s_1 possèdent des rotations de sens contraire. Les deux triangles sphériques donnant respectivement les produits de

p par s et par s_1 sont des triangles adjacents: les arcs représentatifs de sp et s_1p appartiennent à un même grand cercle, mais sont parcourus en sens inverse. Les vecteurs α' et α'_1 qui leur correspondent, sont donc des vecteurs opposés ayant la même longueur; celle-ci est égale à la grandeur du quaternion p. Le même fait ayant lieu pour les produits sq, s_1q, qs, ..., ps, ps_1, ..., nous aurons 6 vecteurs α, β, γ, α', β', γ' correspondant à la valeur positive de u et 6 vecteurs α_1, β_1, γ_1, α'_1, β'_1, γ'_1 respectivements opposés aux précédents, correspondant à $u_1 = -u$.

Pour obtenir la somme $p + q + r$, nous pouvons procéder de la façon suivante: multiplions les quaternions p, q et r soit par s, soit par s_1 et additionnons les vecteurs représentatifs des produits ainsi obtenus. La somme cherchée $Q = p + q + r$ pourra se déduire ensuite d'une des sommes:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \alpha + \beta + \gamma = ps + qs + rs = (p + q + r)s = Qs \ , \\
\Pi' &= \alpha' + \beta' + \gamma' = sp + sq + sr = s(p + q + r) = sQ \ , \\
\Pi_1 &= \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = ps_1 + qs_1 + rs_1 = (p + q + r)s_1 = Qs_1 \ , \\
\Pi_1' &= \alpha_1' + \beta_1' + \gamma_1' = s_1p + s_1q + s_1r = s_1(p + q + r) = s_1Q
\end{aligned}$$

par la division correspondante par s ou par s_1. Les résultantes Π et Π' et leurs opposées Π_1 et Π_1' sont toutes de même longueur, car les composantes α, β, γ, α', β', γ', α_1, ... ont des longueurs égales aux grandeurs des quaternions correspondants:

$$\begin{aligned}
|p| &= |\alpha| = |\alpha'| = |\alpha_1| = |\alpha_1'| \ , \\
|q| &= |\beta| = |\beta'| = |\beta_1| = |\beta_1'| \ , \\
|r| &= |\gamma| = |\gamma'| = |\gamma_1| = |\gamma_1'|
\end{aligned}$$

et forment respectivement des angles deux à deux égaux. On le constate aisément en considérant les triangles sphériques qui sont deux à deux symétriquement disposés par rapport au plan de s. La longueur de ces résultantes est d'ailleurs égale à la grandeur du quaternion-somme, puisque la division par un verseur ne la modifie pas. Les directions de α, β, γ, ... ne dépendent que des amplitudes des quaternions p, q et r, tandis que celles de leurs résultantes Π, Π', ... seront tout autres si l'on change les grandeurs de p, q et r, c. à d. les longuers de α, β, γ, ...

38. Voyons maintenant si le pôle S existe toujours, c. à d. si u et u_1 sont toujours réels. Rapportons les points P, Q, R et S, qui sont sur la sphère unité, à un système d'axes trirectangulaires ayant son origine au centre de la sphère et soient p_h, q_h, r_h et s_h les coordonnées respectives de ces points. Ces coordonnées sont en même temps les cosinus directeurs des droites $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ et $\overline{OS}$. Les équations

$$\frac{\cos(\widehat{PS})}{\cot\widehat{p}} = \frac{\cos(\widehat{QS})}{\cot\widehat{q}} = \frac{\cos(\widehat{RS})}{\cot\widehat{r}}$$

donnent:

$$\frac{\cos(\widehat{PS})}{\cos(\widehat{QS})} = \frac{\cot\widehat{p}}{\cot\widehat{q}} = m \ , \quad \frac{\cos(\widehat{QS})}{\cos(\widehat{RS})} = \frac{\cot\widehat{q}}{\cot\widehat{r}} = n \ , \qquad \text{(a)}$$

ou bien, en exprimant les cosinus en fonction des coordonnées:

$$(p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3) = m(q_1 s_1 + q_2 s_2 + q_3 s_3) \ ,$$
$$(q_1 s_1 + q_2 s_2 + q_3 s_3) = n(r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3) \ .$$

Chacune de ces équations représente un plan réel, passant par l'origine et défini par les trois coefficients de s_1, s_2 et s_3:

$$(p_1 - mq_1)s_1 + (p_2 - mq_2)s_2 + (p_3 - mq_3)s_3 = 0 \ ,$$
$$(q_1 - nr_1)s_1 + (q_2 - nr_2)s_2 + (q_3 - nr_3)s_3 = 0 \ .$$

Dans le cas général, ces plans se coupent et S est parfaitement déterminé.

Les deux plans sont confondus et le point S est indéterminé si l'on a:

$$\frac{p_1 - mq_1}{q_1 - nr_1} = \frac{p_2 - mq_2}{q_2 - nr_2} = \frac{p_3 - mq_3}{q_3 - nr_3} = \text{C.}$$

Ces trois équations, avec les trois relations reliant les cosinus p_h, q_h et r_h, forment un système de 6 équations. Si donc on se donne les amplitudes des 3 quaternions, ce qui détermine les coefficients m et n, et le plan de l'un d'eux, les deux autres auront leurs plans définis par ces 6 équations.

Il nous faut encore voir ce qui arrive si l'un des plans est indeterminé, ce qui a lieu si les trois coefficients $p_h - mq_h$ ou bien $q_h - nr_h$ s'annulent tous à la fois. Si, par ex., $p_h = q_h$ et $m = 1$, nous aurions à la place de la première équation une identité et le pôle S serait indéterminé.

C'est le cas où les quaternions p et q sont identiques et on n'a que deux quaternions distincts: l'addition se fera donc sans aucune difficulté par la méthode du nº 25.

Supposons $m \neq 1$, c. à d. que les amplitudes de p et de q sont différentes. Si $\frac{p_h}{q_h} = m$, ce qui signifie que les plans de ces quaternions sont confondus, les équations

$$\frac{\cos(\widehat{PS})}{\cot \widehat{p}} = \frac{\cos(\widehat{QS})}{\cot \widehat{q}} = \frac{\cos(\widehat{RS})}{\cot \widehat{r}} = \cot \widehat{s} \qquad \text{(b)}$$

ne sont vérifiées que si $\cos(\widehat{PS}) = \cos(\widehat{QS}) = 0$, puisque les relations (a) peuvent s'écrire:

$$m \frac{\cos(\widehat{QS})}{\cot \widehat{p}} = n \frac{\cos(\widehat{RS})}{\cot \widehat{q}} ,$$

les quantités m, n, $\cot \widehat{p}$ et $\cot \widehat{q}$ étant quelconques. Le pôle S se trouvera donc dans le plan commun des quaternions p et q et le plan du quaternion s sera alors orthogonal à ce dernier.

L'équation (b) nous donnera:

$$\cos(\widehat{RS}) = 0 \quad \text{ou} \quad \widehat{RS} = 90^0$$

et, par suite, le pôle S sera sur l'intersection des plans de $p \equiv q$ et de r. En outre, $\cot \widehat{s} = 0$, c. à d. $\widehat{s} = 90^0$; le quaternion s est donc rectangle ou vecteur. Nous tombons de nouveau sur le cas de sommation de deux vecteurs à partir d'un vecteur commun, ce dernier étant ici le vecteur $\overrightarrow{OS}$.

CHAPITRE III

REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES QUATERNIONS ET FORMULES DE O. RODRIGUES.

1. FORME ANALYTIQUE DES QUATERNIONS.

39. **Verseurs unitaires.** Prenons les quaternions i_1, i_2, i_3 dont les 4 composantes sont respectivement: 0, 1, 0, 0 pour i_1, 0, 0, 1, 0 pour i_2 et 0, 0, 0, 1 pour i_3. On les marquera:

$$i_1 = (0, 1, 0, 0) \quad , \quad i_2 = (0, 0, 1, 0) \quad , \quad i_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Ces trois quaternions ayant leurs grandeurs égales à l'unité sont des verseurs rectangles, puisque leurs composantes d'indice zéro sont nulles.

Leurs plans forment un trièdre trirectangle, car on a:

$$(i_1, i_2) = 0 \quad , \quad (i_2, i_3) = 0 \quad , \quad (i_3, i_1) = 0$$

où le premier indice indique le verseur unitaire, tandis que le second distingue ses composantes. Ainsi, la première de ces égalités exprimant que les axes des verseurs-quadrants i_1 et i_2 sont à angle droit, s'écrit:

$$i_{11} i_{21} + i_{12} i_{22} + i_{13} i_{23} = 0 \quad .$$

Les plans de i_1, i_2 et i_3 se confondent avec les plans de coordonnées $OX_1X_2X_3$ d'un trièdre trirectangle sinistrorsum, et ces quaternions, assimilés à des vecteurs, seront représentés par des vecteurs unités dirigés suivant les axes de coordonnées de mêmes indices.

On établirait facilement, soit en partant des considérations géométriques, soit en appliquant les formules de multiplication (14), les formules fondamentales suivantes:

$$i_h i_\xi = i_\eta = - i_\xi i_h \quad , \tag{19}$$

$$i_h^2 = i_h i_\xi i_\eta = - i_h i_\eta i_\xi = - 1 \tag{20}$$

où les indices ξ et η dérivent de h, comme convenu, par une permutation circulaire des chiffres 1, 2, 3.

Voyons l'effet analytique des verseurs-quadrants i_h sur les 4 composantes d'un quaternion quelconque q.

Evaluons le produit $i_h q$. En désignant par $(i_h q)_k$ ses composantes, les formules (14) donnent immédiatement:

$$\left.\begin{aligned} (i_h q)_0 &= -q_h \ , \\ (i_h q)_h &= \ \ q_0 \ , \\ (i_h q)_\xi &= -q_\eta \ , \\ (i_h q)_\eta &= \ \ q_\xi \ . \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Appliquons deux fois de suite un même opérateur i_h à q. On aura, en tenant compte des formules (21):

$$\left.\begin{aligned} (i_h^2 q)_0 &= (i_h \cdot i_h q)_0 = -(i_h q)_h = -q_0 \ , \\ (i_h^2 q)_h &= (i_h \cdot i_h q)_h = \ \ (i_h q)_0 = -q_h \ , \\ (i_h^2 q)_\xi &= (i_h \cdot i_h q)_\xi = -(i_h q)_\eta = -q_\xi \ , \\ (i_h^2 q)_\eta &= (i_h \cdot i_h q)_\eta = \ \ (i_h q)_\xi = -q_\eta \ . \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Par un raisonnement identique, on obtient aussi:

$$(q\, i_h)_0 = -q_h \ , \ (q\, i_h)_h = q_0 \ , \ (q\, i_h)_\xi = q_\eta \ , \ (q\, i_h)_\eta = -q_\xi \tag{21'}$$

et

$$\left.\begin{aligned} (q\, i_h^2)_0 &= (q\, i_h \cdot i_h)_0 = -(q\, i_h)_h = -q_0 \ , \\ (q\, i_h^2)_h &= (q\, i_h \cdot i_h)_h = \ \ (q\, i_h)_0 = -q_h \ , \\ (q\, i_h^2)_\xi &= (q\, i_h \cdot i_h)_\xi = \ \ (q\, i_h)_\eta = -q_\xi \ , \\ (q\, i_h^2)_\eta &= (q\, i_h \cdot i_h)_\eta = -(q\, i_h)_\xi = -q_\eta \ . \end{aligned}\right\} \tag{22'}$$

L'effet du verseur i_h^2 ne diffère donc en rien de l'effet de la multiplication par -1.

40. **Théorème.** *Tout quaternion $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ peut être mis sous la forme analytique*

$$q = q_0 + q_1\, i_1 + q_2\, i_2 + q_3\, i_3 \ ,$$

les coefficients q_k étant les 4 nombres définis par les formules de définition (1).

En effet, cette expression qui est une somme de 4 quaternions q_0 et $q_h i_h$ a pour quantités caractéristiques les 4 mêmes nombres q_k qui définissent le quaternion q. Pour avoir, par ex., sa composante d'indice 2, il faut, d'après la définition (10) de la somme des quaternions et le corollaire qui en découle, remplacer les i_h et q_0 qui est un quaternion numérique, par leurs composantes d'indice 2. Or, c'est seulement i_2 qui a une composante de cet indice non nulle et égale à 1; par suite, toute cette somme se réduit à q_2. De même, la $k^{\underline{ième}}$ composante de ce quaternion-somme sera q_k. On en conclut que le quaternion représenté par cette somme est identique au quaternion q, puisqu'ils ont les mêmes composantes.

On peut développer toute la théorie des quaternions en partant de cette forme analytique et en tenant compte des relations (19) et (20) reliant les quantités i_h entre elles. On arriverait à établir les mêmes propriétés et théorèmes que nous avons démontrés plus haut. Les coefficients q_k d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de quaternions pris sous leurs formes analytiques, s'obtiendront d'après les formules établies précédemment.

Toutes les définitions déjà données subsistent, par conséquent, et nous pouvons écrire:

1. *Grandeur du quaternion:*

$$|q| = \sqrt{((qq))} \quad ,$$

où

$$((qq)) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = (q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3)(q_0 - q_1 i_1 - q_2 i_2 - q_3 i_3) = q \cdot \bar{q}.$$

2. *Quaternion-somme Q:*

$$Q = \sum_{(l)} (q_0^l + q_1^l i_1 + q_2^l i_2 + q_3^l i_3)$$

$$= \sum_{(l)} q_0^l + \sum_{(l)} q_1^l i_1 + \sum_{(l)} q_2^l i_2 + \ldots = Q_0 + Q_1 i_1 + Q_2 i_2 + Q_3 i_3 ,$$

$$\text{avec} \quad Q_k = \sum_{(l)} q_k^l \quad .$$

3. *Quaternion opposé $-q$:*

$$-q = -q_0 - q_1 i_1 - q_2 i_2 - q_3 i_3 \quad .$$

4. *Quaternion inverse ou réciproque* q^{-1}:

$$q^{-1} = \frac{q_0}{((q,q))} - \frac{q_1}{((q,q))}\, i_1 - \frac{q_2}{((q,q))}\, i_2 - \frac{q_3}{((q,q))}\, i_3$$
$$= \frac{1}{q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3} \quad .$$

5. *Quaternion conjugué* $\overline{q}$:

$$\overline{q} = q_0 - q_1 i_1 - q_2 i_2 - q_3 i_3 = \frac{((q,q))}{q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3} \quad .$$

Remarquons que la forme analytique d'un quaternion n'est autre chose que la décomposition de ce quaternion en un quaternion numérique et un vecteur, ce dernier étant donné par la somme de ses trois composantes suivant les trois vecteurs unités i_1, i_2 et i_3: $q = q_0 + \chi = q_0 + (q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3)$.

2. EFFET ET COMPOSANTES DE L'OPÉRATEUR $p \cdot\cdot p^{-1}$.

41. **Théorème.** *Le quaternion* $q' = pqp^{-1}$ *a la même grandeur et la même amplitude que le quaternion* q, *mais son plan diffère de celui de* q: *le plan de* q' *s'obtient à partir du plan de* q *par une rotation de ce plan autour de l'axe de* p *d'un angle qui est le double de l'amplitude de* p.

Voyons tout d'abord la grandeur du quaternion-produit $q' = pqp^{-1}$. Nous avons:

$$|q'| = |p||q| \cdot \frac{1}{|p|} = |q| \quad .$$

L'opérateur pqp^{-1} ne modifiant pas la grandeur de q, nous pouvons, pour plus de clarté, la supposer égale à l'unité, de même que celle des quaternions p et p^{-1}. Ces trois verseurs peuvent alors être représentés sans ambiguïté par des arcs des grands cercles d'une sphère-unité.

Soit b le point d'intersection des grands cercles des quaternions p et q (fig. 10), et soient $\widehat{ab} = q$ et $\widehat{bc} = \widehat{cd} = p$. Il s'ensuit:

$$\widehat{ac} = \widehat{ab} + \widehat{bc} = pq \ .$$

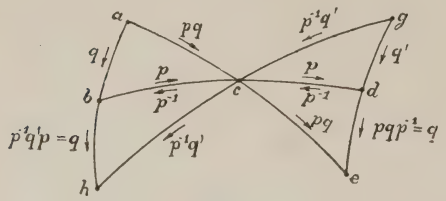

Fig. 10

Prolongeons en grand cercle l'arc $\widehat{ac}$ en $\widehat{ce}$

$$\widehat{ac} = \widehat{ce} = pq$$

et remarquons ensuite que l'inverse p^{-1} de p est représenté par l'arc $\widehat{dc}$: $p^{-1} = \widehat{dc} = \widehat{cb}$. L'arc du grand cercle $\widehat{de}$ joignant les extrémités d et e, sera:

$$\widehat{de} = \widehat{dc} + \widehat{ce} = pq \cdot p^{-1} = q' \ .$$

Or, de la construction des deux triangles sphériques abc et ced, il résulte que les arcs $\widehat{ab}$ et $\widehat{de}$ sont égaux en longueur, ce qui montre que les amplitudes de q et de pqp^{-1} sont égales et que les rotations produites par ces deux quaternions sont de même sens. Les angles en b et en d étant égaux entre eux, on voit que l'arc $\widehat{de} = \widehat{gd}$, représentant le quaternion q', peut être obtenu de l'arc $\widehat{ab}$, représentant q, par un entraînement de ce dernier, le long du cercle de p, d'un angle qui est le double de l'amplitude de p. Le plan de q' s'obtient donc par une rotation du plan de q autour de l'axe de p d'un angle égal au double de l'amplitude de p.

Dans le cas où l'angle b du triangle sphérique abc est droit, l'angle d le sera aussi. Les plans des quaternions q et q' passent donc par l'axe du quaternion p, tandis que leurs axes se trouvent dans le plan de p. Si nous supposons, en outre, que le quaternion q est rectangle, c. à d. que q est un vecteur, ce vecteur appartiendra aux quaternions p et p^{-1}. L'arc $\widehat{ab}$ étant égal à 90^0 et l'angle en b étant un angle droit, l'arc $\widehat{ac}$ sera aussi de 90^0, de même que les arcs $\widehat{ce}$ et $\widehat{de}$. Les points a et e se trouveront aux extrémités opposées du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan du quaternion p. On en conclut que pour obtenir le vecteur q'

appartenant au quaternion p, il suffit de faire tourner dans le plan de p le vecteur q d'un angle égal au double de l'amplitude de p, sans modifier sa longueur.

42. Pour avoir les 4 composantes du quaternion $q' = pqp^{-1}$ p et q étant quelconques, il suffit d'appliquer les formules (16) aux quaternions $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ et p^{-1} $= \left(\frac{p_0}{((p,p))}, \frac{-p_1}{((p,p))}, \frac{-p_2}{((p,p))}, \frac{-p_3}{((p,p))}\right)$.

On obtient, après la substitution:

$$q_0' = \frac{p_0 q_0 p_0}{((p,p))} - \frac{1}{((p,p))} \sum_{j=1}^{j=3} (p_j q_j p_0 - p_0 q_j p_j - p_j q_0 p_j - [p,q]_j p_j)$$

d'où:

$$q_0' = q_0 \quad . \tag{23}$$

De même

$$q_h' = -\frac{p_0 q_0 p_h}{((p,p))} + \frac{p_h}{((p,p))} \sum_{j=1}^{j=3} p_j q_j + \frac{p_0 q_h p_0}{((p,p))} + [p,q]_h \frac{p_0}{((p,p))}$$

$$- p_0 [q, \frac{p}{((p,p))}]_h + q_0 [p, \frac{p}{((p,p))}]_h - q_h \sum_{j=1}^{j=3} p_j \frac{p_j}{((p,p))}$$

$$+ \frac{p_h}{((p,p))} \sum_{j=1}^{j=3} q_j p_j + \frac{p_h q_0 p_0}{((p,p))}$$

et après les réductions:

$$q_h' = \frac{1}{((p,p))} \{2 p_h (p,q) + 2 p_0 [p,q]_h + q_h (p_0 p_0 - (p,p))\} \quad . \tag{23}$$

Il n'est pas difficile de faire voir que les amplitudes des quaternions q' et q sont égales. En effet, la quantité q_0' est identique à q_0 et on a, puisque les grandeurs de q et de q' sont égales:

$$(q', q') = (q, q).$$

En désignant par A' l'amplitude de q' et par A celle de q, on pourra, par conséquent, écrire: (formules (5) et (6)):

$$|q'|\ cosA' = q_0' = q_0 = |q|\ cosA\ ,$$
$$((q',q'))sin^2A' = (q',q') = (q,q) = ((q,q))sin^2A\ ,$$

ce qui donne, au signe près, $A' = A$. Mais la question de signe n'intervient pas, le sens de rotation des deux quaternions étant le même.

Dans le cas particulier où les plans des quaternions p et q sont perpendiculaires entre eux, on constate aisément que les formules (23) deviennent identiques, au facteur numérique $\frac{1}{((p,p))}$ près, aux formules donnant les quantités $(pp\chi)_h$ du quaternion-produit $pp\chi$, où χ est un quaternion rectangle ($q_0 = 0$). Ces formules sont:

$$(pp\chi)_h = (p_0p_0 - (p,p))q_h + 2p_0[p,q]_h\ .$$

Les quantités $q_h' = (pqp^{-1})_h$, où q est un quaternion quelconque, étant proportionnelles aux composantes $(pp\chi)_h$ où χ est un quaternion-quadrant, les plans de q' et de $pp\chi$ sont confondus. On voit donc que le plan de q' s'obtient à partir de celui de q par une rotation autour de l'axe de p d'un angle égal au double de l'amplitude de p.

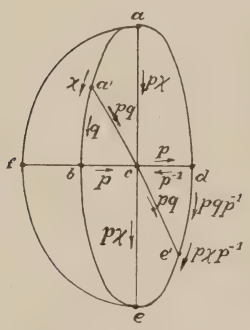

Fig. 11

Géométriquement, soient

$$\widehat{ab} = \chi = 90^0\ ,\ \widehat{ac} = p\chi = \widehat{ce}$$

les arcs représentatifs de χ et de $p\chi$ (fig. 11). On a:

$$\widehat{ad} = \widehat{ac} + \widehat{cd} = p \cdot p\chi = \widehat{de}$$
$$= \widehat{dc} + \widehat{ce} = p\chi \cdot p^{-1},$$

les plans des quaternions $p\chi p^{-1}$ et $pp\chi$ sont donc confondus.

Mais ceci reste encore vrai dans le cas où χ n'est pas un quaternion rectangle dans le produit $p\chi p^{-1}$ car alors, si $\widehat{a'b} = q \neq 90^0$, on a:

$$\widehat{a'c} = pq = \widehat{ce'}\ ;$$

le point e' et, par suite, l'arc $\widehat{de'}$ se trouveront sur le grand cercle ade et les plans de pqp^{-1} et de $pp\chi$ sont encore confondus.

En résumé, si nous désignons avec Hamilton par B un corps rigide ou un système de vecteurs, n'appartenant pas nécessairement au quaternion p, l'expression pBp^{-1} représente la nouvelle position de ce corps, ou de ce système, après sa rotation autour de l'axe du quaternion p d'un angle égal au double de l'amplitude de p. Si l'on veut renverser le sens de rotation, on n'a qu'à appliquer l'opérateur $p^{-1}Bp$, comme on le voit sur la figure 10. En effet, si $\widehat{gd} = q' = \widehat{de}$, on peut écrire:

$$\widehat{gc} = \widehat{gd} + \widehat{dc} = p^{-1}\, q' = \widehat{ch}\ ,$$
$$\widehat{bh} = \widehat{bc} + \widehat{ch} = p^{-1}\, q'\, p = \widehat{ab} = q$$

et le sens de rotation est renversé.

3. COROLLAIRE: FORMULES DE O. RODRIGUES.

43. **Problème.** *Etant donné un corps solide B, dont la position dans l'espace est définie par un système d'axes trirectangulaires $OX_1\, X_2\, X_3$, invariablement lié au corps, on demande:* 1) *de tourner ce corps d'un angle donné autour d'un axe donné passant par le point O;* 2) *d'exprimer les cosinus directeurs des axes nouveaux $OX'_1\, X'_2\, X'_3$, obtenus après la rotation, par des expressions rationnelles des trois quantités.*

L'axe et l'angle de rotation étant donnés, déterminons un quaternion p, ayant le même axe et dont l'amplitude est la moitié de l'angle de rotation à effectuer. Ce quaternion p est parfaitement déterminé par les données du problème. La rotation demandée sera obtenue, par l'application de l'opérateur pBp^{-1} au corps solide B.

Soient i_1, i_2 et i_3 trois vecteurs-unités dont les supports se confondent respectivement avec les axes OX_1, OX_2, OX_3. Pour avoir les cosinus directeurs de ces axes après leur rotation, traitons leurs vecteurs-directeurs i_1, i_2 et i_3 par l'opérateur pi_hp^{-1} qui les amène sur les axes $OX'_1\, X'_2\, X'_3$. On obtient par les formules (23),

en tenant compte des valeurs des composantes des i_h, l'expression suivante :

$$i_1' = pi_1p^{-1} = \frac{1}{((p,p))}\{(p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)i_1 + 2(p_3p_0 + p_1p_2)i_2 + 2(p_1p_3 - p_0p_2)i_3\} .$$

Les coefficients de i_1, i_2 et i_3 sont des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de l'axe OX_1' par rapport au système primitif $OX_1 X_2 X_3$, car OX_1' est le support du vecteur-unité $i_1' = pi_1p^{-1}$.

De même pour les autres axes OX_2' et OX_3' :

$$i_2' = pi_2p^{-1} = \frac{1}{((p,p))}\{2(p_1p_2 - p_3p_0)i_1 + (p_0^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_1^2)i_2 + 2(p_0p_1 + p_2p_3)i_3\} ,$$

$$i_3' = pi_3p^{-1} = \frac{1}{((p,p))}\{2(p_1p_2 + p_3p_0)i_1 + 2(p_3p_2 - p_1p_0)i_2 + (p_0^2 + p_3^2 - p_2^2 - p_1^2)i_3\} .$$

Les 9 cosinus directeurs des axes nouveaux sont ainsi exprimés rationnellement à l'aide de 3 des quantités p_k, car l'une d'elle s'élimine immédiatement en divisant le numérateur et le dénominateur du second membre par cette quantité.

En réunissant les 3 formules précédentes, nous obtenons la formule générale :

$$i_h' = pi_hp^{-1} = \frac{1}{((p,p))}\{(p_0^2 + p_h^2 - p_\xi^2 - p_\eta^2)i_h + 2(p_0p_\eta + p_hp_\xi)i_\xi + 2(p_hp_\eta - p_0p_\xi)i_\eta\} ,$$

les indices ξ et η dérivant de h par permutation circulaire des chiffres 1, 2, 3.

Les formules de transformation des coordonnées pourront donc s'écrire :

$$x_h' = a_{hh}x_h + a_{h\xi}x_\xi + a_{h\eta}x_\eta ,$$

où les coefficients a_{hh} , $a_{h\xi}$, $a_{h\eta}$ ont les expressions suivantes:

$$a_{hh} = \frac{p_0^2 + p_h^2 - p_\xi^2 - p_\eta^2}{((p,p))} ,$$

$$a_{h\xi} = \frac{2(p_0 p_\eta + p_h p_\xi)}{((p,p))} ,$$

$$a_{h\eta} = \frac{2(p_h p_\eta - p_0 p_\xi)}{((p,p))} .$$

44. Remarquons que la grandeur du quaternion p peut être prise absolument quelconque, l'opérateur pBp^{-1} ne produisant pas d'extension. Nous pouvons, en particulier, poser:

$$p_0 = |p| \cdot p_0' \quad , \quad p_h = |p| \cdot p_h'$$

de sorte que

$$((p,p)) = ((p,p))((p', p'))$$

et, par conséquent: $((p',p')) = 1$. Le verseur p', déterminé par les 4 quantités p'_k, ne diffère que par sa grandeur du quaternion p, et l'opérateur $p'Bp'^{-1}$ produira la même rotation que l'opérateur pBp^{-1}.

Prenons donc la grandeur du quaternion p égale à l'unité. Dans cette supposition, nous aurons identiquement: $p^{-1} = \bar{p}$ et, par suite

$$pBp^{-1} = pB\bar{p} .$$

Les coefficients de Rodrigues prennent une forme simplifiée; nous en formons le tableau suivant:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 , & a_{21} &= 2(p_1 p_2 - p_3 p_0) , \\
a_{12} &= 2(p_0 p_3 + p_1 p_2) , & a_{22} &= p_0^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_1^2 , \\
a_{13} &= 2(p_3 p_1 - p_2 p_0) , & a_{23} &= 2(p_0 p_1 + p_2 p_3) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= 2(p_0 p_2 + p_3 p_1) , \\
a_{32} &= 2(p_2 p_3 - p_1 p_0) , \\
a_{33} &= p_0^2 + p_3^2 - p_1^2 - q_2^2 ,
\end{aligned}$$

les quantités p_k vérifiant la condition $((p,p)) = 1$.

4. SECONDE DÉFINITION DE LA MULTIPLICATION DE QUATERNIONS.

45. Nous avons vu tout à l'heure quel est l'effet de l'opérateur $p \,..\, p^{-1}$, le quaternion p étant absolument quelconque. Appliquons cet opérateur à un quaternion s et soit s' le quaternion que l'on obtient:

$$s' = psp^{-1} \ .$$

La figure (10) montre que nous avons identiquement:

$$s' = ps \cdot p^{-1} = p \cdot sp^{-1} \ .$$

Le quaternion s' peut à son tour être traité par un opérateur $q \,..\, q^{-1}$. Désignons par s'' l'effet de cette opération:

$$s'' = qs'q^{-1} \ ,$$

s'' est donc obtenu à partir de s par deux rotations consécutives, 1) autour de l'axe du quaternion p, d'un angle qui est le double de l'amplitude de p; 2) autour de l'axe de q, d'un angle qui est le double de l'amplitude de ce dernier.

Le quaternion t sera dit le produit qp s'il transforme le quaternion s directement en s'', c. à d. si l'on a

$$s'' = tst^{-1} = (qp) \cdot s \cdot (qp)^{-1} \ .$$

L'amplitude du quaternion t doit être égale à la moitié de l'amplitude de l'opérateur $t \,...\, t^{-1}$. Pour la construire, rappelons le théorème de cinématique sur l'addition des rotations.

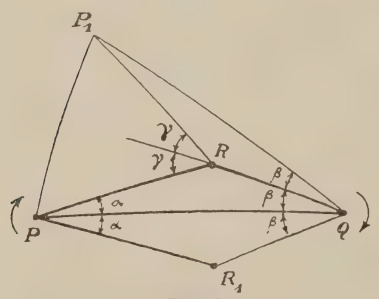

Fig. 12

Soient $\hat{\alpha}$ = ampl. de p ,
$\hat{\beta}$ = ampl. de q ,
$\hat{\gamma}$ = ampl. de t ,

et P, Q les pôles des deux premiers sur une sphère-unité (fig. 12).

La rotation produite par $p \,..\, p^{-1}$ est de 2α autour de l'axe $\overline{OP}$ et celle produite par $q \,..\, q^{-1}$ est de 2β autour de $\overline{OQ}$. Menons par les points P et Q des arcs de grands cercles, formant

respectivement les angles α et β avec l'arc $\widehat{PQ}$. Soit R leur intersection: $\overline{OR}$ *est l'axe du quaternion* $t = qp$.

En effet, tournons tout d'abord de 2α autour de $\overline{OP}$. Le point R viendra en un point R_1, symétrique de R par rapport à $\widehat{PQ}$. La rotation de 2β autour du point Q le ramènera de nouveau en R. Ce point reste, par suite, fixe, il est le pôle de la rotation, équivalente aux deux rotations précédentes autour de $\overline{OP}$ et de $\overline{OQ}$. En construisant le triangle PP_1R comme c'est indiqué sur la figure, on obtiendra l'angle γ de la rotation résultante ($P_1\widehat{Q}P = 2\beta$, $|\widehat{PQ}| = |\widehat{P_1Q}|$):

$$-\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos(\widehat{PQ}) \quad .$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que le triangle polaire $P'R'Q'$ du triangle PRQ donnera la construction directe de l'amplitude du quaternion t. En effet, γ étant l'angle supplémentaire de l'angle des plans des quaternions p et q, nous avons bien la construction ci-contre (fig. 13). Cette construction se confond d'ailleurs avec la construction tirée de la définition du produit de deux quaternions donnée au n° 29.

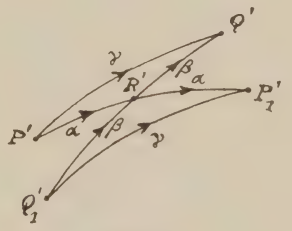

Fig. 13

Remarquons que l'interversion de l'ordre des rotations fait passer le centre de la rotation résultante au point R_1 (fig. 12). La construction correspondante de l'arc représentatif de l'angle γ sera donnée par le triangle polaire $Q_1'R'P_1'$ du triangle QR_1P, ce qui est d'accord avec les définitions déjà vues.

46. La définition précédente de la multiplication des quaternions permet de donner une preuve facile de la propriété associative de la multiplication: $r \cdot qp = rq \cdot p$.

Pour cela, posons comme tout à l'heure:

$$psp^{-1} = s' \quad , \tag{24}$$
$$qs'q^{-1} = s'' \tag{25}$$

et enfin

$$rs''r^{-1} = s''' = r(qs'q^{-1})r^{-1} = us'u^{-1} \ , \qquad (26)$$

où $u = rq$.

Le résultat final reste invariable soit si nous éliminons s' tout d'abord et s'' ensuite, soit si c'est le contraire qui a lieu. Les 3 égalités (24), (25) et (26) donnent dans les deux cas, grâce au théorème sur la composition des rotations:

$$s''' = u(psp^{-1})u^{-1} = r(tst^{-1})r^{-1}$$

et par suite:

$$u \cdot p = r \cdot t \ ,$$

c'est à dire:

$$rq \cdot p = r \cdot pq \ .$$

C. Q. F. D.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

W. R. HAMILTON. *Elements of Quaternions,* 2e Edit. chez C. J. Joly, London 1904.

P. G. TAIT. *Traité élémentaire des quaternions,* trad. par G. Plarr, chez Gauthier-Villars, Paris 1882.

J. HOUËL. *Éléments de la théorie des quaternions,* chez Gauthier-Villars, Paris 1874.

CH. A. LAISANT. *Applications mécaniques du calcul des quaternions,* Thèse, chez Gauthier-Villars, Paris 1877.

CH. A. LAISANT. *Introduction à la méthode des quaternions,* chez Gauthier-Villars, Paris 1881.

PH. KELLAND. *Introduction to Quaternions,* 2e Edit. chez Macimillian & Co., London 1882, 3e Edit. chez Knott, London 1904.

A. S. HARDY. *Elements of Quaternions,* chez Ginn & Co., Boston 1887.

CH. GALOPIN SCHAUB. *Premières notions du calcul des quaternions,* chez Gauthier-Villars, Paris 1896.

C. J. JOLY. *A manuel of Quaternions,* chez Macimillian & Co., London 1905.

A. HURWITZ. *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen,* chez J. Springer, Berlin 1919.

COL. LEVEUGLE. *Precis du Calcul Géométrique,* chez Gauthier-Villars, Paris 1920.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Avant propos 3

CHAPITRE I

Définitions et développements analytiques . . . . . 5—34

1. Formules de définition (n°n° 1—7) 5
2. Addition des quaternions (n°n° 8—11) 11
3. Multiplication des quaternions (n°n° 12—15) 15
4. Généralisation de la notion du vecteur (n°n° 16—17) . . . 22
5. Définitions (n°n° 18—24) 25

CHAPITRE II

Interprétation géométrique de la théorie . . . . . 34—61

1. Addition des quaternions (n°n° 25—28) 34
2. Multiplication et division des quaternions (n°n° 29—33) . . 40
3. Propriétés distributive et associative de la multiplication (n°n° 34—35) 48
4. Réduction de 3 quaternions au même dénominateur (n°n° 36—38) 56

CHAPITRE III

Représentation analytique des quaternions et formules de O. Rodrigues . . . . . 62—74

1. Forme analytique des quaternions (n°n° 39—40) 62
2. Effet et composantes de l'opérateur p ... p^{-1} (n°n° 41—42) 65
3. Corollaire: formules de O. Rodrigues (n°n° 43—44) . . . 69
4. Seconde définition de la multiplication de quaternions (n°n° 45—46) 72

Index bibliographique 75

THE LIBRARY OF THE
AUG 1 1 1933
UNIVERSITY OF ILLINOIS

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

Pressboard
Pamphlet
Binder
Gaylord Bros. Inc.
Makers
Syracuse, N. Y.
PAT. JAN 21, 1908

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.53K83T C001
THEORIE DES QUATERNIONS [GENEVE?
3 0112 017057065